

بِسْمِ خُدا



«دانشکده مهندسی عمران»

«جزوه درس تحلیل غیر ارتجاعی سازه»

به ارزش ۳ واحد

استاد: جناب آقای دکتر مسعود حسین زاده اصل

گردآورنده: عرفان یحیی زاد (دانشجوی دوره دکتری مهندسی عمران – سازه)

فهرست مطالب

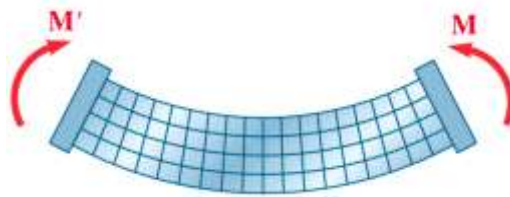
صفحه	عنوان فصل
۱	فصل اول (مفصل پلاستیک)
۲۶	فصل دوم (تیرها و قاب‌های ساده)
۳۶	فصل سوم (تحلیل فزاینده)
۵۱	فصل چهارم (تحلیل حدی)
۶۶	فصل پنجم (تغییر شکل در آستانه فروریزش)
۷۱	فصل ششم (تعیین دامنه الاستوپلاستیک)
	پیوست انتهای جزوه

فصل اول

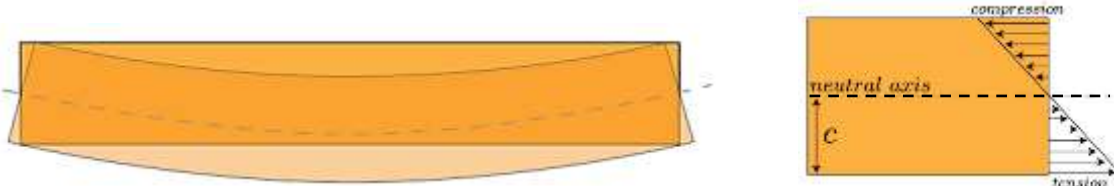
«مفصل پلاستیک»

مفاهیم اولیه خمش خالص

مطابق شکل زیر، تیری را فرض کنید که تحت خمش خالص قرار دارد:



همانطور که مشاهده می‌کنید، قسمت‌های بالای محور طولی (که با خط چین نمایش داده شده است)، دچار کاهش طول و قسمت‌های پایین محور طولی دچار افزایش طول شده است. به عبارت دیگر، قسمت بالای محور دچار تنش فشاری و قسمت‌های پایین محور دچار تنش کششی می‌شود.



همانطور که مشاهده می‌کنید، اندازه تنش (بدون توجه به علامت تنش) در تارهای فوقانی و تحتانی ماکزیموم بوده و هرچه به سمت مرکز و محور خط چین نزدیک می‌شویم تنش به سمت صفر میل می‌کند. لذا به محور خط چین مذکور در یک مقطع تحت خمش خالص، محور خنثی یا تار خنثی می‌گویند؛ زیرا در آن تنش و کرنش برابر صفر است. حال می‌خواهیم موقعیت تار خنثی را در یک مقطع محاسبه کنیم.

۱- محور خنثی الاستیک

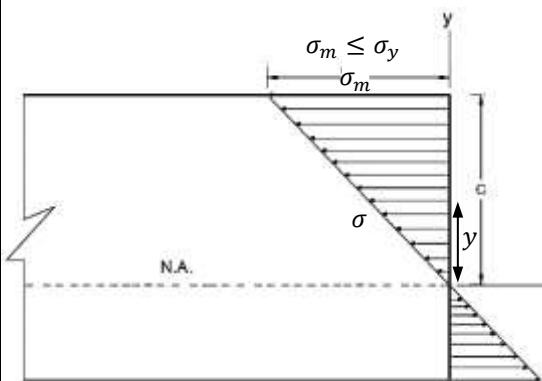
چنانچه مقطعی تحت لنگر خمشی قرار گیرد و مقدار لنگر به اندازه‌ای باشد که تنش خمشی ایجاد شده در محدوده الاستیک باقی بماند. مطابق شکل، با فرض اینکه اولین تار فشاری تحت خمش به حد تسلیم رسیده است خواهیم داشت:

$$\frac{\sigma}{\sigma_m} = \frac{y}{c} \rightarrow \sigma = \frac{y}{c} \sigma_m$$

از قضیه تالس

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \int \sigma dA = 0 \rightarrow \int \frac{y}{c} \sigma_m dA = \left(\frac{\sigma_m}{c} \right) \int y dA = 0$$

بنابراین: $\int y dA = 0$



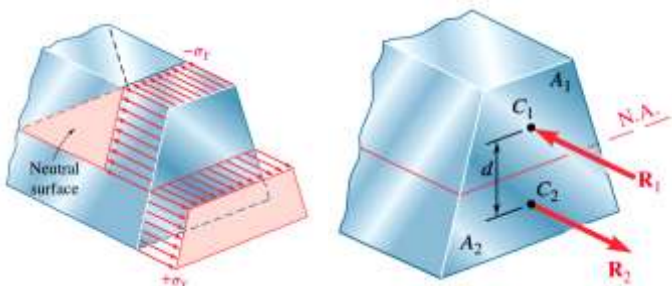
عبارت فوق بیانگر تعریف لنگر اول سطح است. پس باید حاصل انتگرال فوق برابر صفر باشد. لنگر اول سطح زمانی صفر است که حول مرکز سطح مقطع، آنرا محاسبه کنیم. لذا موقعیت تار خنثی الاستیک بشرطی که تنش تسلیم برای کل مقطع یکسان باشد، منطبق بر مرکز سطح است.

۲- محور خنثی پلاستیک

چنانچه لنگر خمشی وارد بر مقطع عضو به تدریج افزایش یابد به طوری که تارهای مقطع شروع به تسلیم شدن کنند و تمام مقطع به تنش تسلیم برسد در این حالت مقطع از حالت الاستیک به پلاستیک رسیده است و دیگر قانون هوک برای آن صدق نمی‌کند. در حالت پلاستیک در واقع ما از تمام ظرفیت مقطع برای طراحی استفاده می‌کنیم.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow R_1 = R_2 \rightarrow A_1 \sigma_y = A_2 \sigma_y \rightarrow A_1 = A_2$$

همانطور که اثبات شد، اگر تنش تسلیم برای کل مقطع یکسان باشد، محور خنثی پلاستیک، مقطع را به دو قسمت با مساحت مساوی تقسیم می‌کند. لذا می‌توان با توجه به نکته فوق موقعیت آنرا بدست آورد.



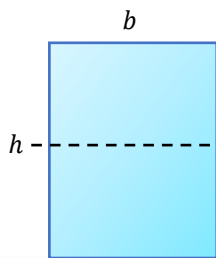
۳- اساس مقطع الاستیک (S)

از تقسیم ممان اینرسی مقطع (I) بر فاصله محور خنثی الاستیک تا دورترین تار مقطع (c) بدست می آید. $S = \frac{I}{c}$

۴- اساس مقطع پلاستیک (Z)

برابر است با مجموع لنگر استاتیکی اجزای بالا و پایین محور خنثی پلاستیک. $Z = \sum Q_i = \sum A_i y_i$

مثال ۱: مطلوب است محاسبه پارامتری اساس مقطع الاستیک و پلاستیک برای یک مقطع مستطیلی.



محور خنثی الاستیک و پلاستیک

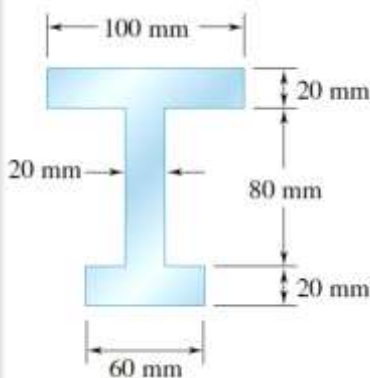
$$S: \begin{cases} I = \frac{bh^3}{12} \\ c = \frac{h}{2} \end{cases} \rightarrow S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$$

$$Z = \sum Q_i = \sum A_i y_i = \left(\frac{bh}{2} \times \frac{h}{4} \right) \times 2 = \frac{bh^2}{4}$$

مثال ۲: مطلوب است محاسبه محل محور خنثی الاستیک و پلاستیک و لنگر پلاستیک برای مقطع زیر. ($\sigma_y = 240 \text{ MPa}$)

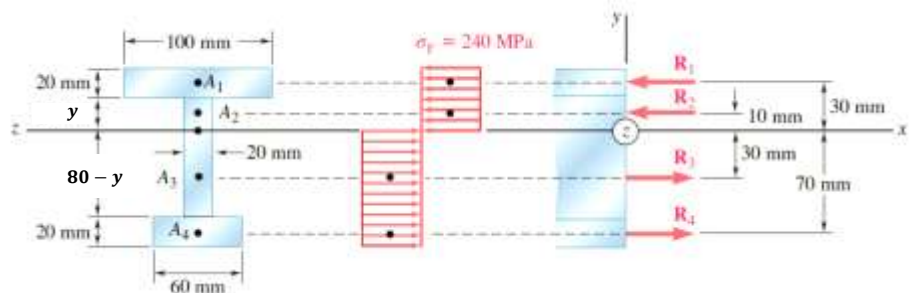
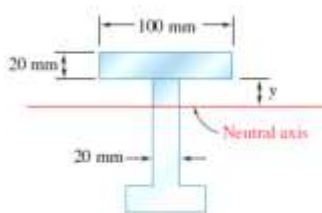
حل:

محاسبه موقعیت محور خنثی الاستیک:



$$\bar{y} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{(100 \times 20 \times 10) + (80 \times 20 \times 60) + (60 \times 20 \times 110)}{(100 \times 20) + (80 \times 20) + (60 \times 20)} = \frac{51000}{2000} = 25.5 \text{ mm}$$

محاسبه موقعیت محور خنثی پلاستیک:



روش اول (روش کلی):

$$\sum F_x = 0 \rightarrow R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 0 \rightarrow (\sigma_y \times A_1) + (\sigma_y \times A_2) - (\sigma_y \times A_3) - (\sigma_y \times A_4) = 0$$

$$\sigma_y [(100 \times 20) + (y \times 20) - ((80 - y) \times 20) - (20 \times 60)] = 0 \rightarrow y = 20 \text{ mm}$$

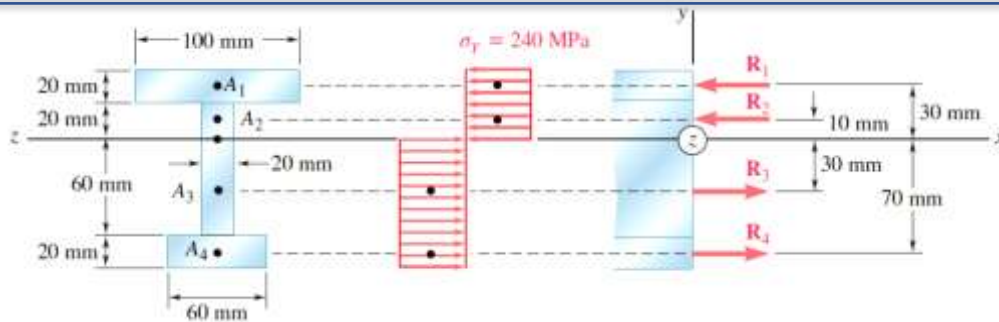
روش دوم (به شرطی که تنش تسلیم در کل مقطع ثابت باشد):

$$A_{\text{پایین تار خنثی}} = A_{\text{بالای تار خنثی}}$$

$$(100 \times 20) + (20 \times y) = (20 \times (80 - y)) + (60 \times 20)$$

$$y = 20 \text{ mm}$$

ادامه حل مثال ۲:



محاسبه لنگر پلاستیک:

روش اول (روش کلی):

$$R_1 = A_1 \sigma_y = (20 \times 100) \times 240 \times 10^{-3} = 480 \text{ kN}$$

$$R_2 = A_2 \sigma_y = (20 \times 20) \times 240 \times 10^{-3} = 96 \text{ kN}$$

$$R_3 = A_3 \sigma_y = (20 \times 60) \times 240 \times 10^{-3} = 288 \text{ kN}$$

$$R_4 = A_4 \sigma_y = (60 \times 20) \times 240 \times 10^{-3} = 288 \text{ kN}$$

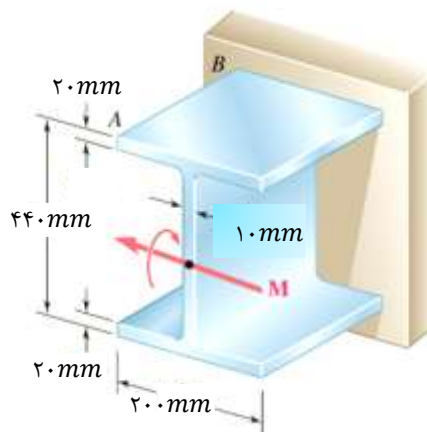
$$M_p = (R_1 \times 30 + R_2 \times 10 + R_3 \times 30 + R_4 \times 70) \times 10^{-3} = 44/16 \text{ kN.m}$$

روش دوم (به شرطی که تنش تسلیم در کل مقطع ثابت باشد):

تبدیل واحد

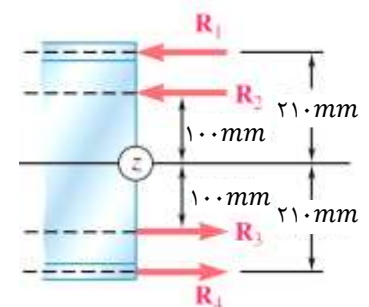
$$M_p = Z \sigma_y = [(20 \times 100 \times 30) + (20 \times 20 \times 10) + (60 \times 20 \times 30) + (60 \times 20 \times 70)] \times 240 \times 10^{-6} = 44/16 \text{ kN.m}$$

مثال ۳: مطلوب است محاسبه لنگر پلاستیک مقطع. ($\sigma_{y\text{بال}} = 240 \text{ MPa}$, $\sigma_{y\text{جان}} = 360 \text{ MPa}$)



حل:

بعلت تفاوت تنش تسلیم در بال و جان مقطع، نمی توان از رابطه $M_p = Z \sigma_y$ استفاده کرد.



$$R_1 = A_1 \sigma_{y\text{بال}} = (20 \times 200) \times 240 \times 10^{-3} = 960 \text{ kN}$$

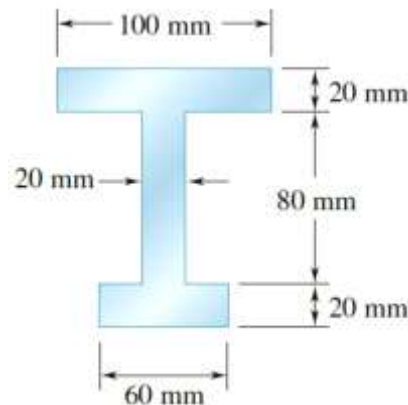
$$R_2 = A_2 \sigma_{y\text{جان}} = (20 \times 100) \times 360 \times 10^{-3} = 720 \text{ kN}$$

$$R_3 = A_3 \sigma_{y\text{جان}} = (20 \times 100) \times 360 \times 10^{-3} = 720 \text{ kN}$$

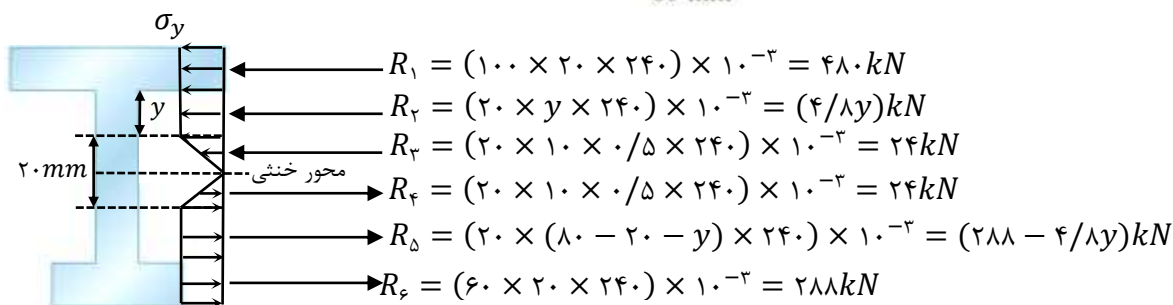
$$R_4 = A_4 \sigma_{y\text{بال}} = (20 \times 200) \times 240 \times 10^{-3} = 960 \text{ kN}$$

$$M_p = (R_1 \times 210 + R_2 \times 100 + R_3 \times 100 + R_4 \times 210) \times 10^{-3} = 547/2 \text{ kN.m}$$

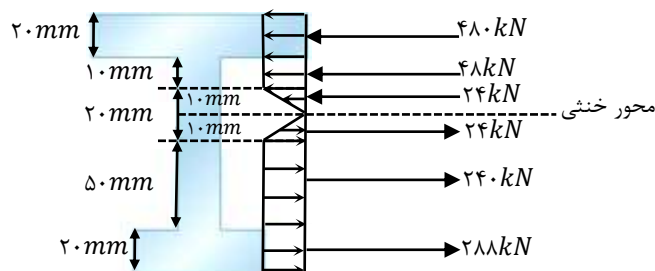
مثال ۴: اگر 20 mm از جان مقطع زیر الاستیک باقی بماند. مطلوب است محاسبه لنگر پلاستیک مقطع. ($\sigma_y = 240\text{ MPa}$)



حل:

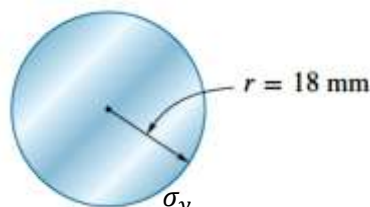


$$\sum F_x = 0 \rightarrow 480 + 4/\lambda y + 24 = 24 + 288 - 4/\lambda y - 288 \rightarrow y = 10\text{ mm}$$



$$M_p = \left[\left(\widehat{R_1} \times 30 \right) + \left(\widehat{R_2} \times 15 \right) + \left(\widehat{R_3} \times \frac{2}{3} \times 10 \right) + \left(\widehat{R_4} \times \frac{2}{3} \times 10 \right) + \left(\widehat{R_5} \times 35 \right) + \left(\widehat{R_6} \times 70 \right) \right] \times 10^{-3} = 44\text{ kN.m}$$

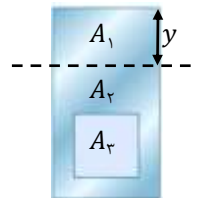
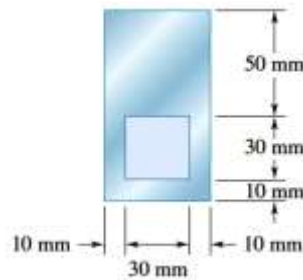
مثال ۵*: مطلوب است محاسبه لنگر پلاستیک مقاطع زیر. ($\sigma_y = 240\text{ MPa}$)



$$\left(\frac{\pi \times 18^2}{2} \right) \times 240 \times 10^{-3} = 122/15\text{ kN}$$

$$M_p = 2 \times \left(122/15 \times \frac{4 \times 18}{3\pi} \right) \times 10^{-3} = 1/87\text{ kN.m}$$

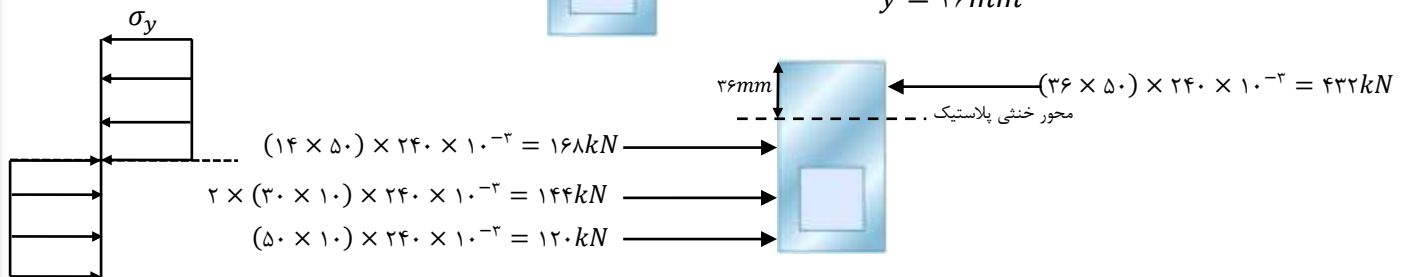
ادامه حل مثال ۵:



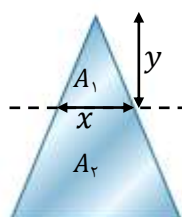
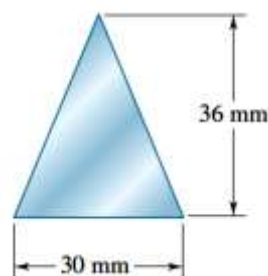
$$A_1 = A_r - A_2$$

$$50 \cdot y = (90 - y) \times 50 - (30 \times 30)$$

$$y = 36 \text{ mm}$$



$$M_p = [(432 \times 18) + (168 \times 7) + (144 \times 29) + (120 \times 49)] \times 10^{-3} = 19 \text{ kN.m}$$



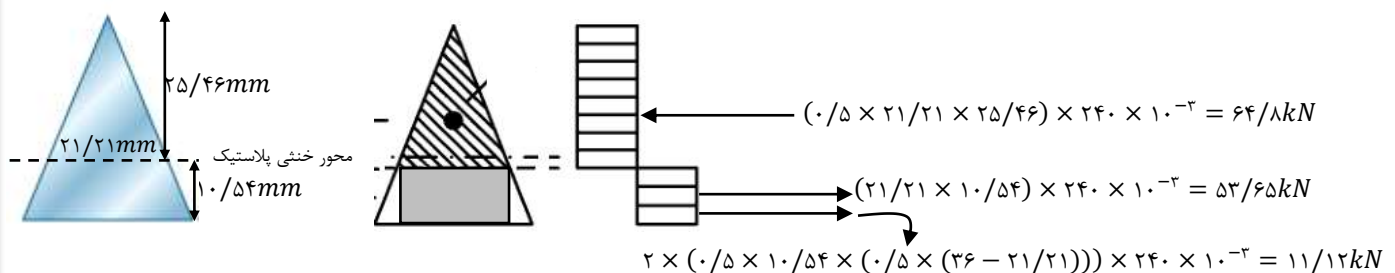
$$\frac{y}{36} = \frac{x}{30} \rightarrow x = \frac{5}{6}y$$

$$A_1 = A_2$$

$$\frac{1}{2} \times y \times \frac{5}{6}y = \frac{(\frac{5}{6}y + 30)(36 - y)}{2}$$

$$y = \pm 18\sqrt{2} \text{ mm} \approx 25.46 \text{ mm}$$

$$x = 15\sqrt{2} \approx 21.21 \text{ mm}$$

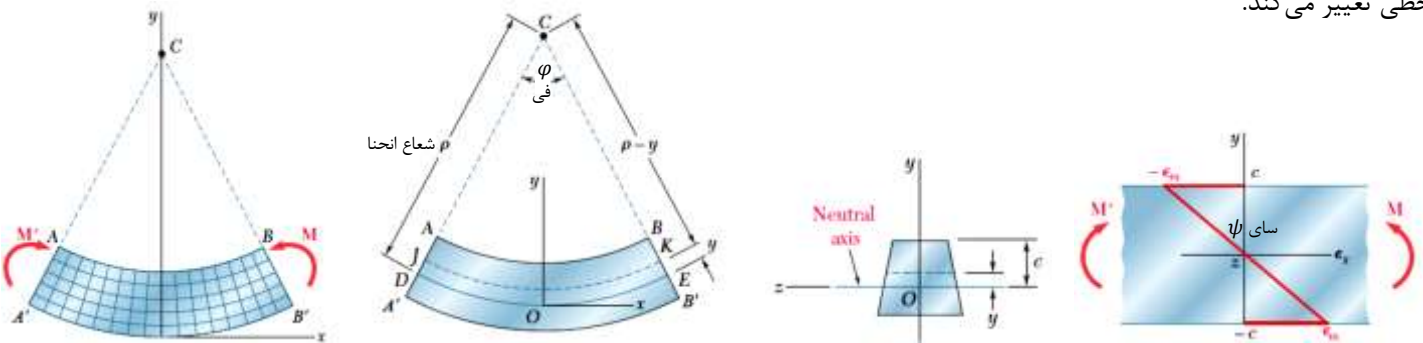


$$M_p = \left[\left(64.8 \times \frac{1}{3} \times 25.46 \right) + \left(53.65 \times \frac{10.54}{2} \right) + \left(11.12 \times \frac{2}{3} \times 10.54 \right) \right] \times 10^{-3} = 0.911 \text{ kN.m}$$

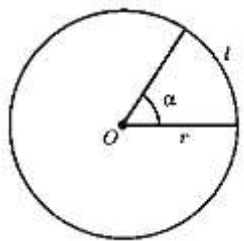
لنگر و تغییر شکل الاستیک مقطع تحت خمش خالص

فرض اساسی تئوری اویلر-برنولی:

صفحات صلب عمود بر تارهای طولی همچنان عمود و مسطح باقی می ماند و بعد از خمش مقداری دوران می کند. لذا کرنش در ارتفاع مقطع بصورت خطی تغییر می کند.

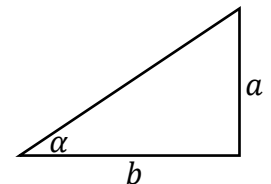


یادآوری:



$$\alpha = \frac{L}{r} \rightarrow L = r\alpha$$

$$\text{If: } \alpha \rightarrow \cdot \Rightarrow \tan(\alpha) = \alpha = \frac{a}{b}$$



لذا:

$$\left. \begin{array}{l} \text{طول اولیه: } DE: L = \varphi\rho \\ \text{طول ثانویه: } JK: L' = \varphi(\rho - y) \end{array} \right\} \rightarrow \epsilon_x = \frac{L' - L}{L} = \frac{\varphi(\rho - y) - \varphi\rho}{L} = \frac{-\varphi y}{L} = \frac{-\varphi y}{\varphi\rho} \rightarrow \epsilon_x = -\frac{y}{\rho} \frac{\psi = \frac{1}{\rho}}{|\epsilon_x| = \epsilon} \rightarrow \epsilon = \psi y$$

رابطه اول:

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon = \frac{y}{\rho} \\ \sigma = E\epsilon \\ M = \int (\sigma \cdot dA)y \end{array} \right\} \rightarrow \sigma = E\psi y \left. \begin{array}{l} \text{ممان اینرسی: } I \\ \int y^2 dA \end{array} \right\} \rightarrow M = \int E\psi y^2 dA = E\psi \int y^2 dA \rightarrow M = EI\psi$$

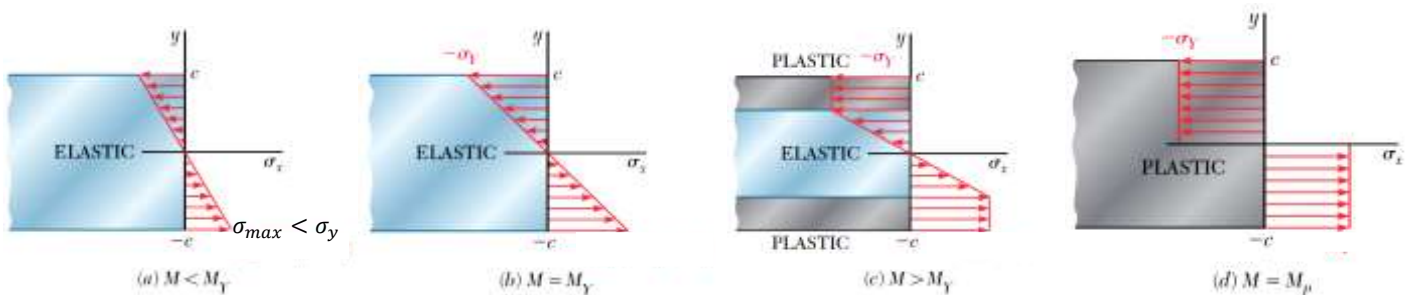
رابطه دوم:

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_m = \frac{c}{\rho} \\ \epsilon_x = \frac{y}{\rho} \\ \sigma = E\epsilon \\ M = \int (\sigma \cdot dA)y \end{array} \right\} \rightarrow \epsilon_x = \frac{y}{c} \epsilon_m \left. \begin{array}{l} \text{ممان اینرسی: } I \\ \int y^2 dA \end{array} \right\} \rightarrow M = \int E \left(\frac{y}{c} \epsilon_m \right) y dA = \frac{E\epsilon_m}{c} \int y^2 dA \rightarrow M = \frac{EI\epsilon_m}{c}$$

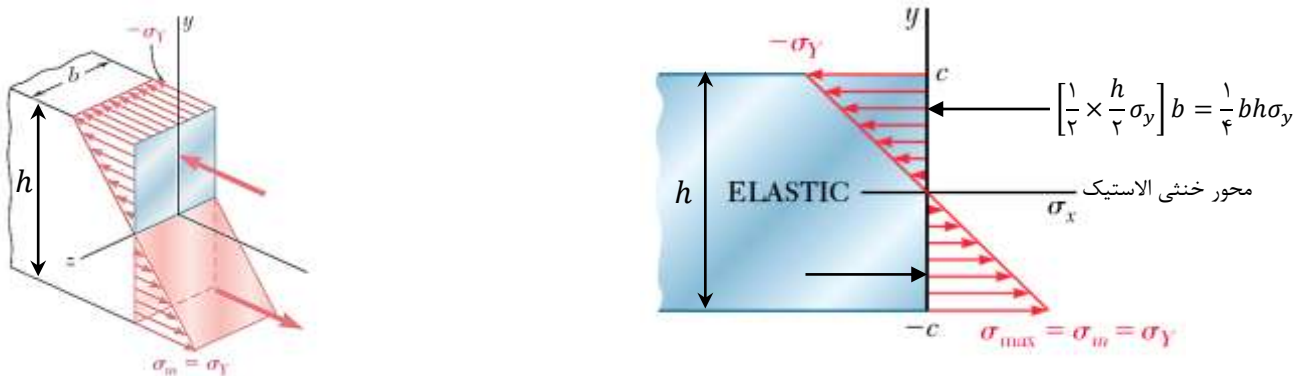
$$M = \frac{EI\epsilon_m}{c} \rightarrow E\epsilon_m = \frac{Mc}{I} \rightarrow \sigma_m = \frac{Mc}{I} \xrightarrow{\text{تنش در فاصله } y} \sigma = \frac{My}{I}$$

لنگر و تغییر شکل پلاستیک مقطع مستطیلی تحت خمش خالص

یک عضو خمشی مثل تیر ستون یا تیر را در نظر بگیرید. با افزایش مقدار لنگر، تارهای بالایی و پایینی مقطع که تحت اثر بیشترین مقدار لنگر هستند، شروع به جاری شدن می‌کنند و به عبارتی از حالت الاستیک به پلاستیک تبدیل می‌شوند. با افزایش مقدار لنگر، کم‌کم کلیه تارهای مقطع جاری می‌شوند که این مورد در شکل نمایش داده شده است. از اینجا به بعد مقطع توانایی تحمل لنگر بیشتری را ندارد و در حقیقت مقطع مانند یک مفصل عمل می‌کند، که به آن مفصل پلاستیک گفته می‌شود و به لنگری که موجب ایجاد مفصل پلاستیک شده، لنگر پلاستیک گفته می‌شود.



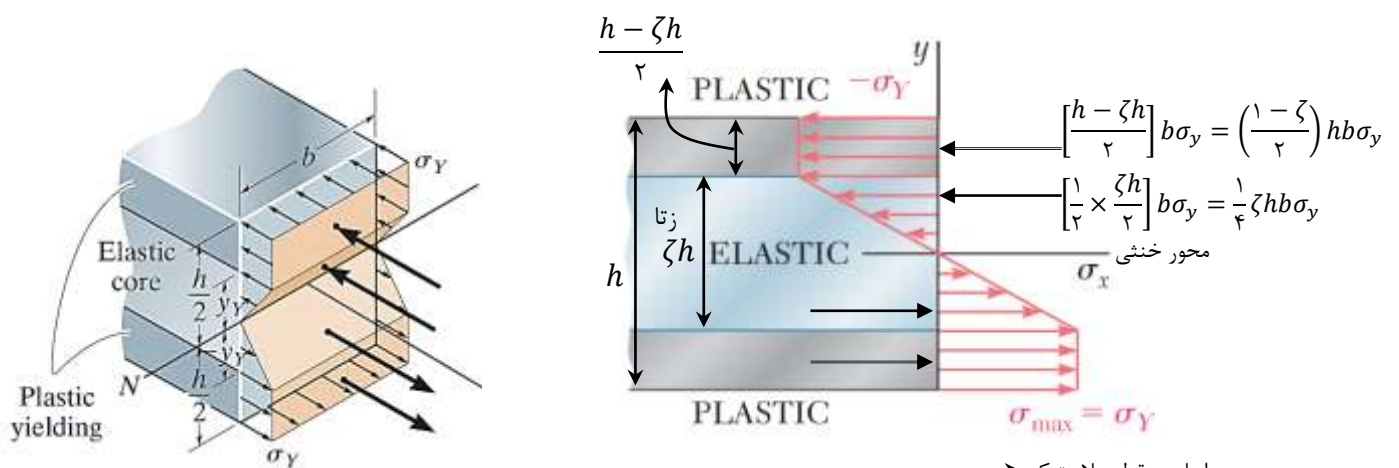
حالت (a) و (b):



اساس مقطع الاستیک

$$M_y = \left[\frac{1}{4} b h \sigma_y \times \left(2 \times \frac{2}{3} \times \frac{h}{2} \right) \right] \rightarrow M_y = \left(\frac{bh^2}{6} \right) \sigma_y \rightarrow M_y = S \sigma_y$$

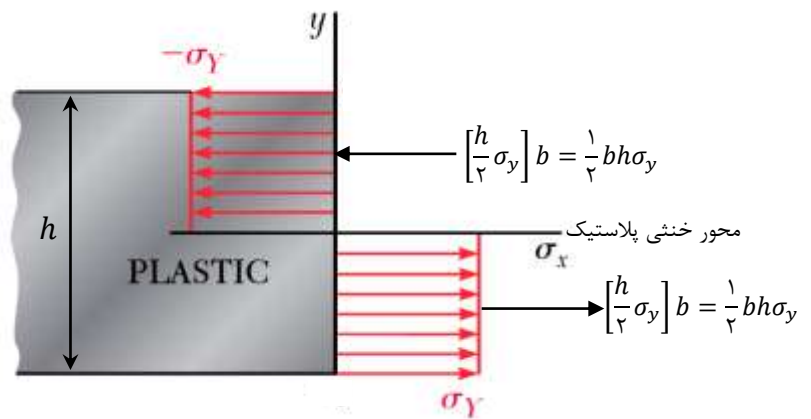
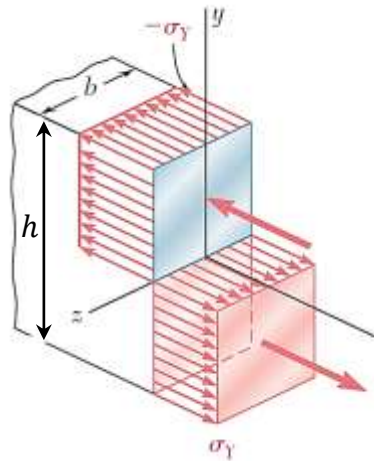
حالت (c):



اساس مقطع پلاستیک

$$M = \left[\left(\frac{1 - \zeta}{2} \right) h b \sigma_y \times \left(\zeta h + \frac{h - \zeta h}{2} \right) \right] + \left[\frac{1}{4} \zeta h b \sigma_y \times \left(2 \times \frac{2}{3} \times \frac{\zeta h}{2} \right) \right] \rightarrow M = \left(\frac{bh^2}{4} \right) \sigma_y \left(1 - \frac{\zeta^2}{3} \right) = Z \sigma_y \left(1 - \frac{\zeta^2}{3} \right)$$

حالت (d):



اساس مقطع پلاستیک

$$M_p = \left[\frac{1}{2} b h \sigma_y \times \left(2 \times \frac{1}{2} \times \frac{h}{2} \right) \right] \rightarrow M_p = \left(\frac{b h^2}{4} \right) \sigma_y \rightarrow M_p = Z \sigma_y$$

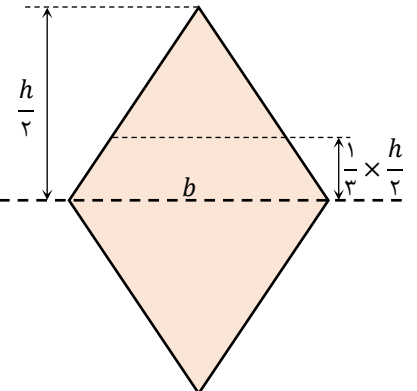
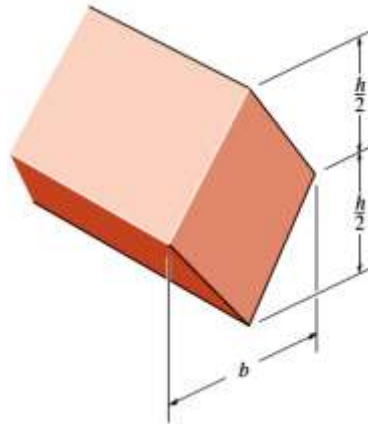
ضریب شکل مقطع

نسبت لنگر قابل تحمل مقطع در حالت پلاستیک M_p به لنگر قابل تحمل مقطع در حالت الاستیک M_y را ضریب شکل مقطع می‌گویند. هرچه ضریب شکل برای تیرهای سازه به عدد یک نزدیک‌تر باشد، مقطع از نظر رفتار خمشی مناسب‌تر است. هرچه تمرکز مصالح حول محور خنثی بیشتر باشد ضریب شکل عدد بزرگتری خواهد بود. ضریب شکل برای مقطع مستطیلی به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$Shape Factor = S.F = \frac{M_p}{M_y} = \frac{\frac{b h^2}{4} \sigma_y}{\frac{b h^3}{6} \sigma_y} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1.5$$

شکل	مستطیل	دایره توپر	لوله مدور	مثلث	مقطع I شکل	سپری	لوزی
ضریب شکل	۱/۵	۱/۷	۱/۲۷	۲/۳۴	۱/۱-۱/۲	۱/۸	۲

ادامه حل مثال*:



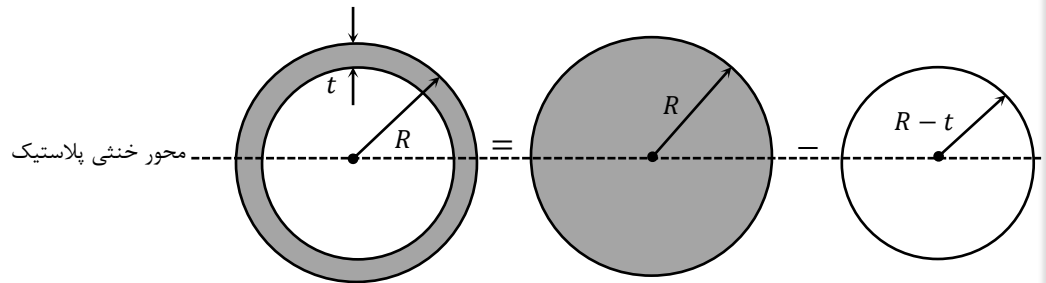
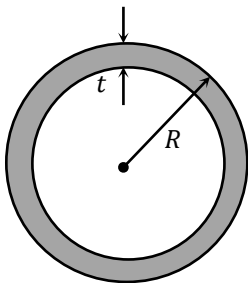
$$I = \sum \left[\frac{1}{12} (b) \left(\frac{h}{2} \right)^3 \right] = \frac{bh^3}{48}$$

$$M_y = S\sigma_y \rightarrow M_y = \frac{I}{c} \sigma_y = \frac{\sigma_y I}{c} = \frac{\frac{bh^3}{48} \sigma_y}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{24} \sigma_y$$

محور خنثی پلاستیک

$$Z = \sum Q_i = \sum A_i y_i = \sum \left[\left(\frac{1}{2} \times b \times \frac{h}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \times \frac{h}{2} \right) \right] = \frac{bh^3}{12}$$

$$S.F = \frac{M_p}{M_y} = \frac{\frac{bh^3}{12} \sigma_y}{\frac{bh^3}{24} \sigma_y} = 2$$



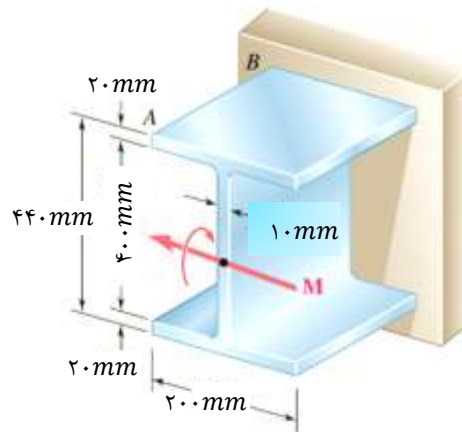
$$I = \frac{\pi}{4} R^4 - \frac{\pi}{4} (R-t)^4$$

$$M_y = S\sigma_y \rightarrow M_y = \frac{I}{c} \sigma_y = \frac{\frac{\pi}{4} [R^4 - (R-t)^4]}{R} \sigma_y$$

$$Z = 2 \times \left(\frac{\pi R^4}{4} \times \frac{R}{R} \right) - 2 \times \left[\frac{\pi (R-t)^4}{4} \times \frac{(R-t)}{R-t} \right] = \frac{\pi (R^4 - (R-t)^4)}{2}$$

$$S.F = \frac{M_p}{M_y} = \frac{\frac{\pi (R^4 - (R-t)^4)}{2} \sigma_y}{\frac{\frac{\pi}{4} [R^4 - (R-t)^4]}{R} \sigma_y} = \frac{16R(R^3 - (R-t)^3)}{\pi [R^4 - (R-t)^4]}$$

مثال ۲: مقطع زیر را در نظر بگیرید. ابتدای به اندازه M_p به آن لنگر وارد می شود. سپس به اندازه $(-M_p)$ به آن لنگر وارد می کنیم (باربرداری). مطلوب است تعیین توزیع تنش در مقطع. ($\sigma_y = 240 \text{ MPa}$)



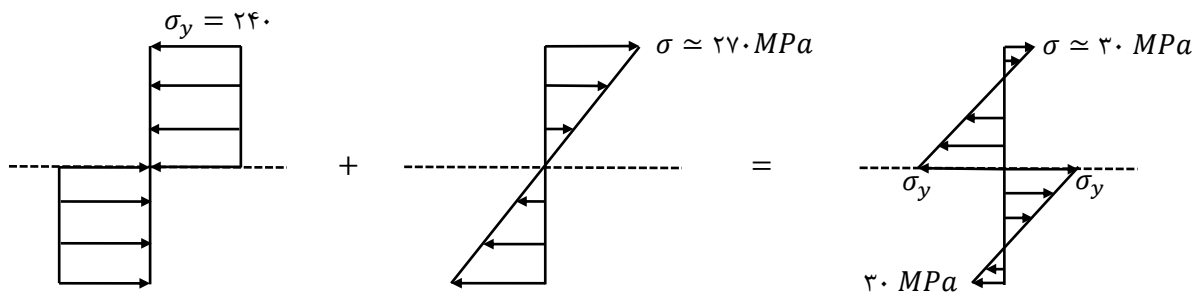
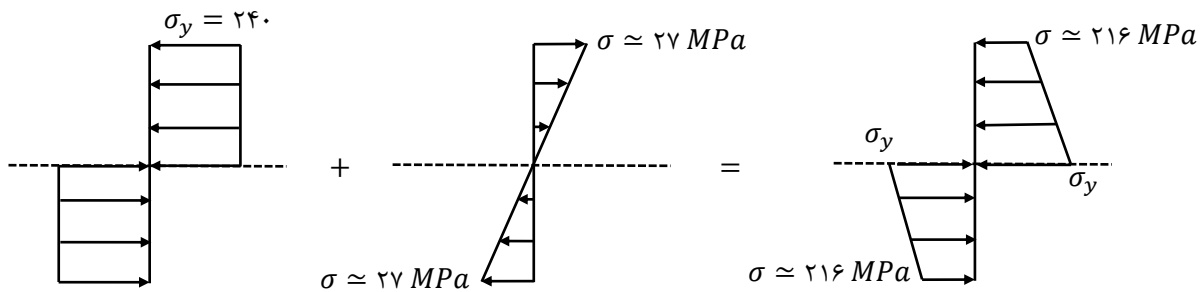
حل:

$$M_p = Z \sigma_y = [2(200 \times 20 \times 210) + 2(200 \times 10 \times 100)] 10^{-9} \times 240 \times 10^6 = 499/2 \text{ kN.m}$$

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{\frac{1}{12} \times 200 \times 440^3 - \frac{1}{12} \times 190 \times 400^3}{499/2 \times 10^3} \approx 27 \text{ MPa}$$

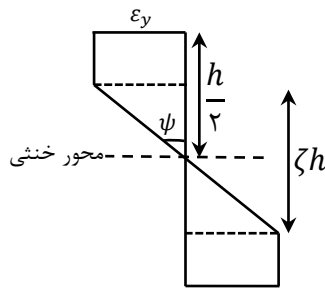
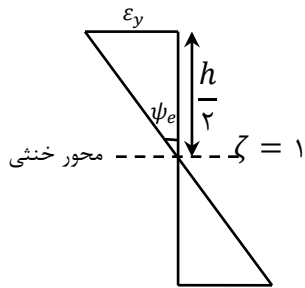
$$M_p = 499/2 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_y = 240 \text{ MPa}$$



منحنی لنگر - انحنا مقطع مستطیلی تحت خمش خالص

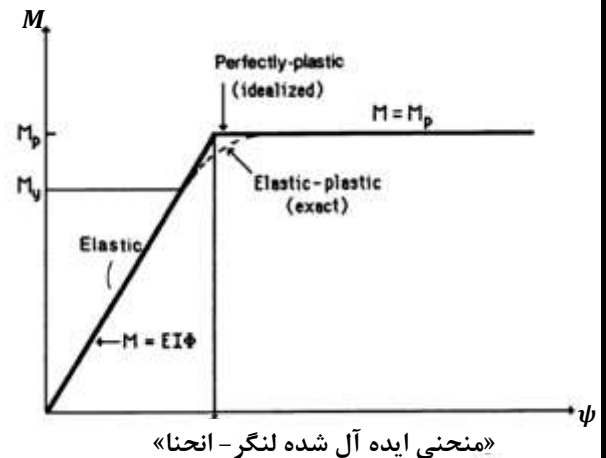
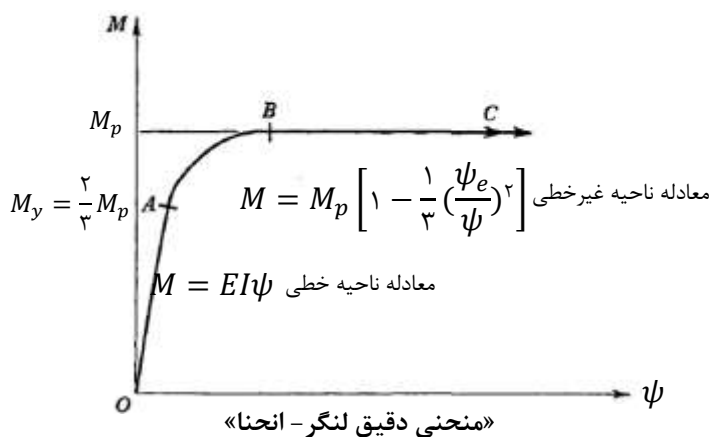
ابتداء رابطه‌ی بین انحنا (سای: ψ) و ضریب (زتا: ζ) را محاسبه می‌کنیم:



$$\frac{\psi_e}{\psi} = \frac{\frac{\epsilon_y}{\frac{h}{2}}}{\frac{\epsilon_y}{\frac{\zeta h}{2}}} = \frac{\epsilon_y \frac{\zeta h}{2}}{\epsilon_y \frac{h}{2}} \rightarrow \frac{\psi_e}{\psi} = \zeta$$

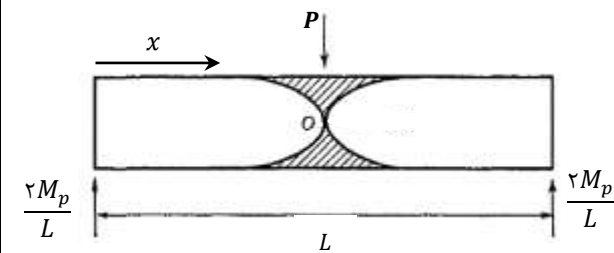
$$M = \frac{bh^3}{12} \sigma_y \left(1 - \frac{\zeta^3}{3}\right) = \frac{bh^3}{12} \sigma_y \left(1 - \frac{(\frac{\psi_e}{\psi})^3}{3}\right) = Z \sigma_y \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\psi_e}{\psi}\right)^3\right] \rightarrow M = M_p \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\psi_e}{\psi}\right)^3\right]$$

$$\begin{cases} M_y = \lim_{\psi \rightarrow \psi_e} M_p \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\psi_e}{\psi}\right)^3\right] = M_p \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\psi_e}{\psi_e}\right)^3\right] = M_p \left[1 - \frac{1}{3}\right] \rightarrow M_y = \frac{2}{3} M_p \\ M = \lim_{\psi \rightarrow \infty} M_p \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\psi_e}{\psi}\right)^3\right] = M_p \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\psi_e}{\infty}\right)^3\right] = M_p [1 - 0] \rightarrow M = M_p \end{cases}$$



منحنی دقیق لنگر - انحنا	وضیعت مقطع
ناحیه OA	ناحیه الاستیک
نقطه A	دورترین تارهای مقطع به تنش تسلیم می‌رسد. (آغاز خرابی مقطع)
ناحیه AB	ناحیه پلاستیک ناقص: قسمتی از مقطع الاستیک و قسمت دیگر آن پلاستیک است.
نقطه B	کل مقطع به تنش تسلیم می‌رسد. (پایان خرابی مقطع)
ناحیه BC	پلاستیک کامل: کل مقطع پلاستیک شده است.
نقطه C	مقطع دچار فروریختگی می‌شود. (پایان خرابی)

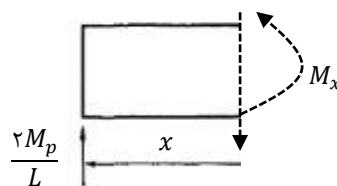
ناحیه پلاستیک تیر دو سر ساده با مقطع مستطیل تحت خمش خالص تحت بار متمرکز



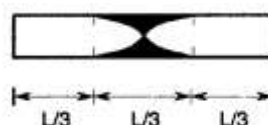
$$M_p = \frac{P_m L}{4} \rightarrow P_m = \frac{4M_p}{L}$$

$$\frac{2M_p}{L} x = M_p \left[1 - \frac{1}{3} \zeta^2 \right] \rightarrow \zeta = \pm \sqrt{3 \left(1 - \frac{2x}{L} \right)}$$

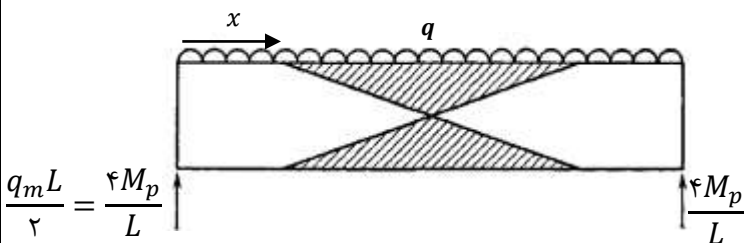
$$\text{If: } \zeta = 1 \rightarrow \frac{2M_p}{L} x = \overbrace{M_p \left[1 - \frac{1}{3} \times 1^2 \right]}^{M_y} \rightarrow x = \frac{L}{3}$$



$$M_x = \frac{2M_p}{L} x$$



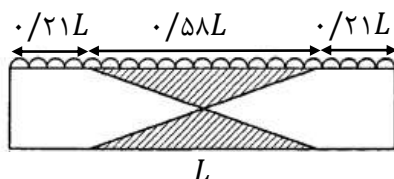
ناحیه پلاستیک تیر دو سر ساده با مقطع مستطیل تحت خمش خالص تحت بار گسترده



$$M_p = \frac{q_m L^2}{8} \rightarrow q_m = \frac{8M_p}{L^2}$$

$$\frac{4M_p}{L} \left(x - \frac{x^2}{L} \right) = M_p \left[1 - \frac{1}{3} \zeta^2 \right] \rightarrow \zeta = \pm \sqrt{3 \left(1 - \frac{2x}{L} \right)}$$

$$\text{If: } \zeta = 1 \rightarrow \frac{4M_p}{L} \left(x - \frac{x^2}{L} \right) = \overbrace{M_p \left[1 - \frac{1}{3} \times 1^2 \right]}^{M_y} \rightarrow \frac{4}{L} \left(x - \frac{x^2}{L} \right) = \frac{2}{3} \rightarrow x^2 - xL + \frac{L^2}{6} = 0 \rightarrow x = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{3}}{6} L \approx 0.21L \\ \frac{3 + \sqrt{3}}{6} L \approx 0.79L \end{cases}$$



در نرم افزارهای مهندسی عمران مانند (ETABS, SAP) بعلا این که تحلیل پلاستیک مقاطع، امری بسیار زمانگیر است. بجای محاسبه ناحیه پلاستیک، یک مفصل در وسط تیر تعریف می کنند و تیر بصورت شکل زیر دچار فروریختگی می شود.

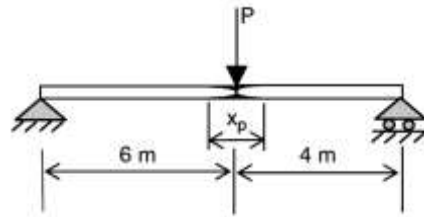


درحالی که مطابق محاسبات تحلیل پلاستیک مقطع، شکل شماتیک فروریختگی تیر بصورت زیر خواهد بود:



برای طراحی پلاستیک، تمامی سطح مقطع ها باید قادر به تحمل لنگر پلاستیک بدون هیچ اثری از کمایش موضعی باشند. برای رسیدن به این هدف باید مقطع فشرده باشد.

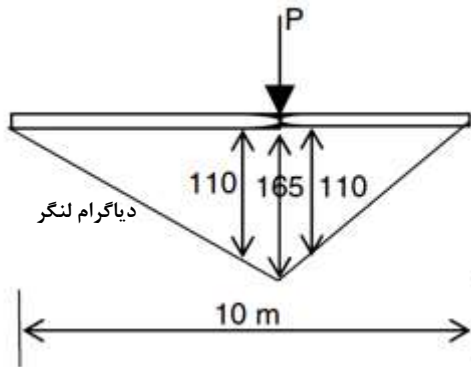
مثال ۱*: یک تیر دوسر ساده با مقطع مستطیلی تحت بارگذاری زیر قرار دارد. مطلوب است محاسبه موقعیت ناحیه پلاستیک با فرض $M_p = 165 \text{ kN.m}$



حل:

روش اول: (استفاده از مفهوم ضریب شکل مقطع)

ناحیه‌ای از دهانه تیر که در آن لنگر مساوی یا بیشتر از لنگر تسلیم باشد ($M \geq M_y$)، در ناحیه پلاستیک قرار می‌گیرد. لذا:



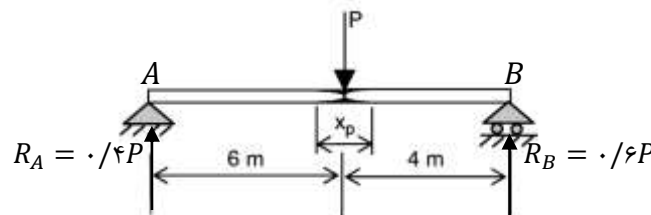
$$S.F_{\text{مستطیل}} = 1/5 = \frac{M_p}{M_y} = \frac{165 \text{ kN.m}}{M_y} \rightarrow M_y = 110 \text{ kN.m}$$

$$\frac{4 - x_{p\text{راست}}}{4} = \frac{110}{165} \rightarrow x_{p\text{راست}} = \frac{4}{3} \approx 1/33 \text{ m}$$

$$\frac{6 - x_{p\text{چپ}}}{6} = \frac{110}{165} \rightarrow x_{p\text{چپ}} = 2 \text{ m}$$

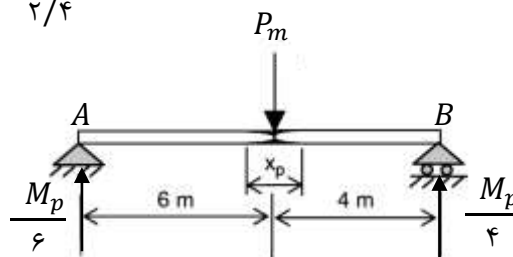
$$x_p = 2 + 1/33 \approx 3/33 \text{ m}$$

روش دوم:



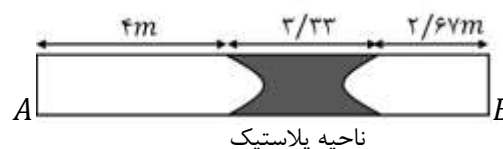
$$\sum M_A = 6P - 1 \cdot R_B \rightarrow R_B = 0.6P$$

$$M_p = 0.4P_m \times 6 = 2/3 P_m \rightarrow P_m = \frac{M_p}{2/3}$$

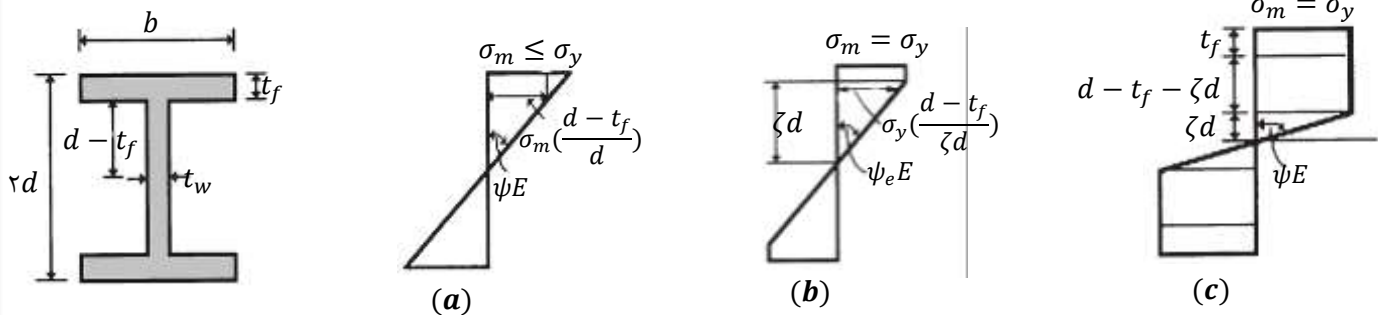


$$\text{از سمت چپ: } If: \zeta = 1 \rightarrow \frac{M_p}{6} \times x = M_p \left[1 - \frac{1}{3} \times 1^2 \right] \rightarrow x = 4 \text{ m}$$

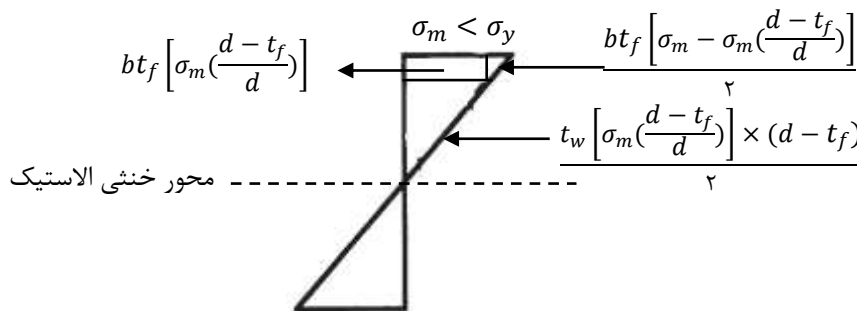
$$\text{از سمت راست: } If: \zeta = 1 \rightarrow \frac{M_p}{4} \times x = M_p \left[1 - \frac{1}{3} \times 1^2 \right] \rightarrow x = \frac{8}{3} \text{ m} \approx 2/67 \text{ m}$$



مثال ۲*: منحنی لنگر-انحنای را برای یک مقطع I شکل تحت خمش خالص بدست آورید.



حالت (a): در این حالت، تنش ماکزیموم (σ_m) در دورترین تار کوچکتر از تنش تسلیم (σ_y) می باشد:

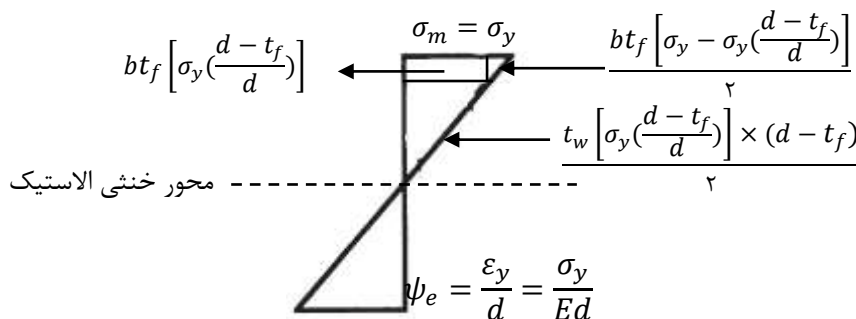


$$M = \underbrace{\left(\left(\frac{1}{2} \times bt_f \left[\sigma_m - \sigma_m \left(\frac{d-t_f}{d} \right) \right] \right) \times \left(d - \frac{1}{2} t_f \right) \right)}_{\text{قسمت مثلثی بال}} + \underbrace{\left(\left(bt_f \left[\sigma_m \left(\frac{d-t_f}{d} \right) \right] \right) \times \left(d - \frac{t_f}{2} \right) \right)}_{\text{قسمت مستطیلی بال}}$$

$$+ \underbrace{\left(\left(\frac{1}{2} \times t_w \left[\sigma_m \left(\frac{d-t_f}{d} \right) \right] \times (d-t_f) \right) \times \left(\frac{2}{3} (d-t_f) \right) \right)}_{\text{جان}}$$

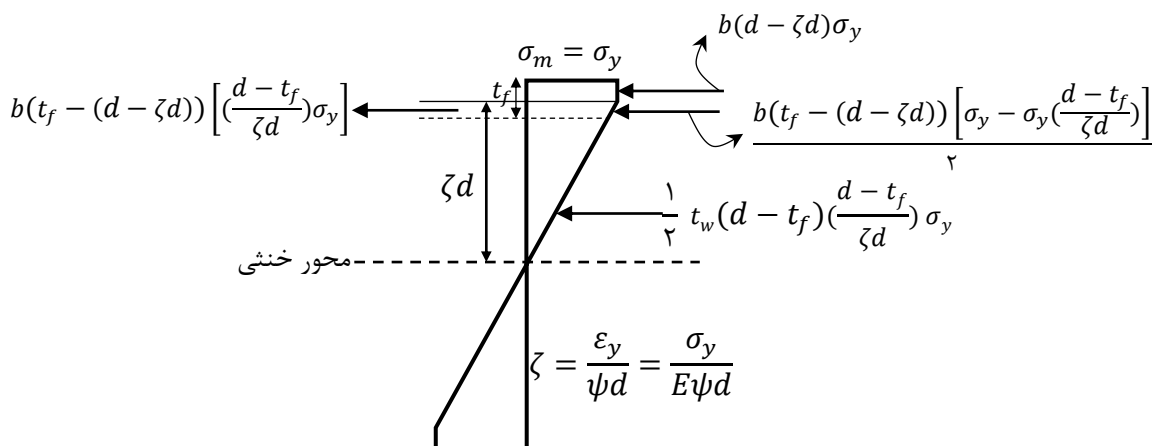
$$M = \frac{2}{3} \sigma_m (d-t_f)^2 \left(\frac{t_w}{d} \right) + \sigma_m \left(\frac{t_f^2}{d} \right) b \left(d - \frac{t_f}{2} \right) + \sigma_m (d-t_f) \left(\frac{b}{d} \right) (2d-t_f) t_f$$

اگر تنش ماکزیموم (σ_m) در دورترین تار برابر تنش تسلیم (σ_y) باشد:



$$M_y = \frac{2}{3} \sigma_y (d-t_f)^2 \left(\frac{t_w}{d} \right) + \sigma_y \left(\frac{t_f^2}{d} \right) b \left(d - \frac{t_f}{2} \right) + \sigma_y (d-t_f) \left(\frac{b}{d} \right) (2d-t_f) t_f$$

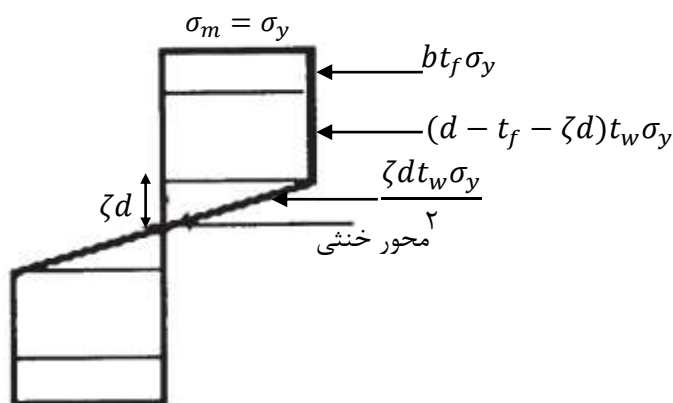
حالت (b): در این حالت، فرض می‌کنیم قسمتی از بال مقطع تسلیم شده است:



$$M = \gamma \left[b(d - \zeta d) \sigma_y \times \left(d - \frac{d - \zeta d}{\gamma} \right) \right] + \gamma \left[\frac{b(t_f - (d - \zeta d)) \left[\sigma_y - \sigma_y \left(\frac{d - t_f}{\zeta d} \right) \right]}{\gamma} \times \left(\zeta d - \frac{1}{\gamma} (t_f - (d - \zeta d)) \right) \right] + \gamma \left[b(t_f - (d - \zeta d)) \left[\left(\frac{d - t_f}{\zeta d} \right) \sigma_y \right] \times \left(\zeta d - \frac{(t_f - (d - \zeta d))}{\gamma} \right) \right] + \gamma \left[\left(\frac{1}{\gamma} t_w(d - t_f) \left(\frac{d - t_f}{\zeta d} \right) \sigma_y \right) \times \left(\frac{\gamma}{\gamma} (d - t_f) \right) \right]$$

$$M = \frac{\gamma}{\gamma} \sigma_y (d - t_f) \left(\frac{t_w}{\zeta d} \right) + \sigma_y b(t_f - d + \zeta d) \left(\frac{\gamma}{\gamma} \zeta d + \frac{1}{\gamma} d - \frac{1}{\gamma} t_f \right) \left(\frac{1}{\gamma} \zeta d \right) + \sigma_y b \left(\frac{d - t_f}{\zeta d} \right) (t_f - d + \zeta d) + (d - t_f + \zeta d) + \sigma_y b d \gamma (1 - \zeta \gamma)$$

حالت (c): در این حالت، فرض می‌کنیم کل بال و قسمتی از جان مقطع تسلیم شده است:



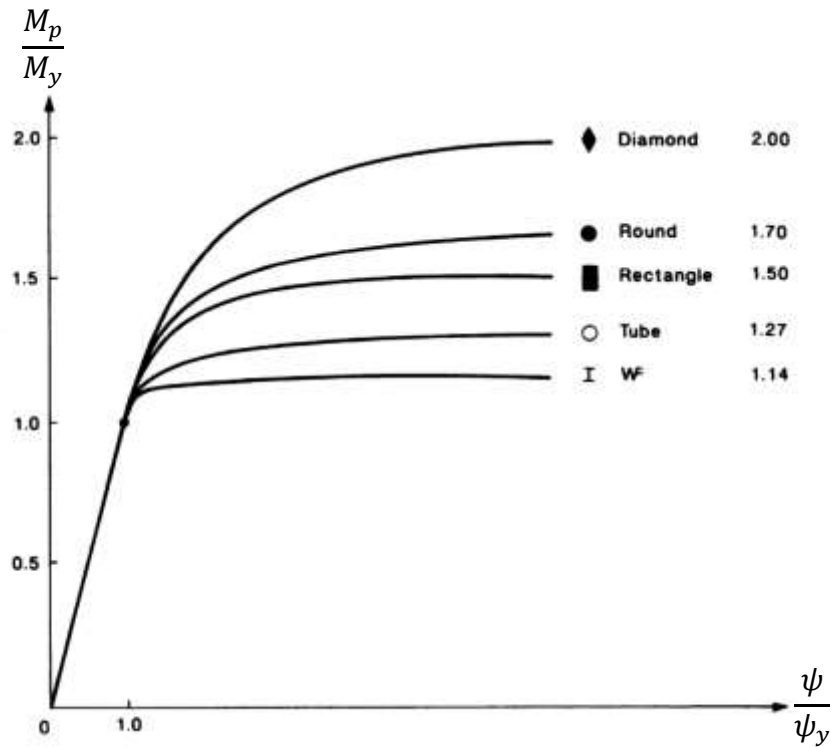
$$M = \gamma \left[b t_f \sigma_y \times \left(d - \frac{t_f}{\gamma} \right) \right] + \gamma \left[(d - t_f - \zeta d) t_w \sigma_y \times \left(\zeta d + \frac{(d - t_f - \zeta d)}{\gamma} \right) \right] + \gamma \left[\frac{\zeta d t_w \sigma_y}{\gamma} \times \left(\frac{\gamma}{\gamma} \zeta d \right) \right]$$

$$M = b t_f \sigma_y (\gamma d - t_f) + t_w \sigma_y (d - t_f - \zeta d) (d - t_f + \zeta d) + \frac{\gamma}{\gamma} \sigma_y \zeta \gamma d t_w$$

اگر کل مقطع تسلیم شود ($\zeta = 0$) در عبارت فوق بجای ζ صفر قرار می‌دهیم، بنابراین لنگر پلاستیک مقطع I شکل بصورت زیر محاسبه می‌شود:

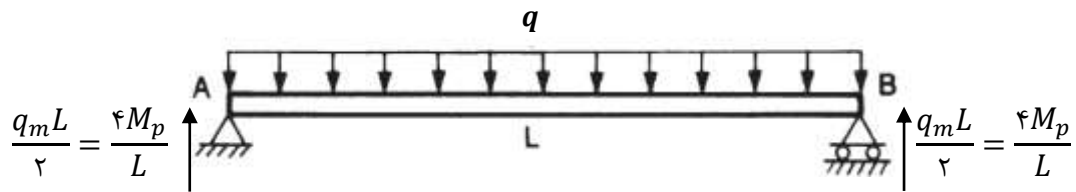
$$M_p = b t_f \sigma_y (\gamma d - t_f) + t_w \sigma_y (d - t_f) \gamma$$

منحنی لنگر- انحنای برای برخی دیگر از مقاطع در دیاگرام زیر ترسیم شده است:



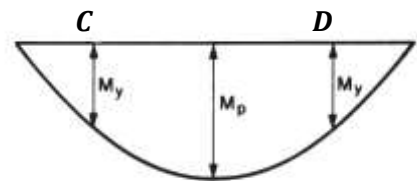
مثال ۳*: یک تیر دوسر ساده با مقطع I شکل تحت بارگذاری با شرایط زیر قرار دارد. مطلوب است محاسبه موقعیت ناحیه پلاستیک با فرض

$$S.F = 1/14$$

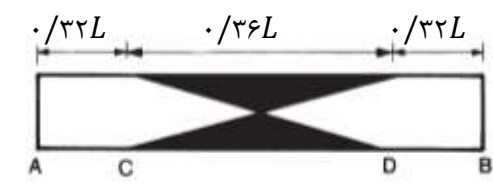


حل:

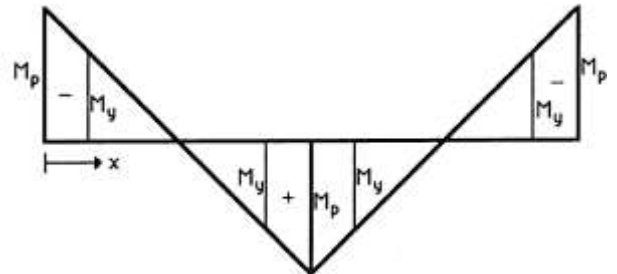
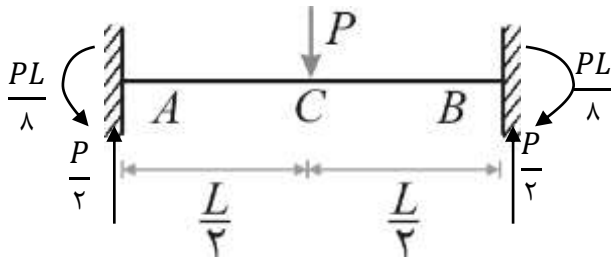
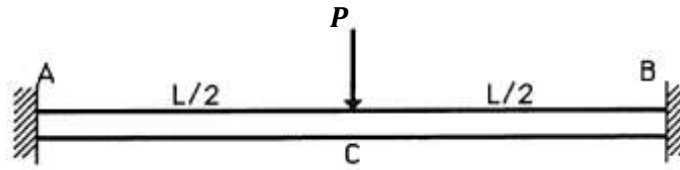
$$M_x = \frac{4M_p}{L}x - \frac{q_m x^2}{2} = \frac{4M_p}{L}x - \frac{4M_p x^2}{L^2} = \frac{4M_p}{L} \left(x - \frac{x^2}{L} \right)$$



$$\frac{4M_p}{L} \left(x - \frac{x^2}{L} \right) = \frac{1}{1/14} M_p \rightarrow x = \begin{cases} \frac{57 + \sqrt{399}}{114} L = 0.68L \\ \frac{57 - \sqrt{399}}{114} L = 0.32L \end{cases}$$



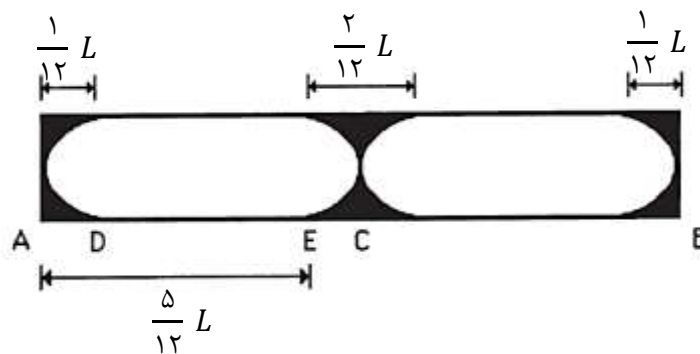
مثال ۴*: یک تیر دوسر ساده با مقطع مستطیلی تحت بارگذاری با شرایط زیر قرار دارد. مطلوب است محاسبه موقعیت ناحیه پلاستیک.



$$M_p = \frac{P_m L}{\lambda} \rightarrow P_m = \frac{\lambda M_p}{L}$$

$$M_x = \frac{P_m}{2} x - \frac{P_m L}{\lambda} = \frac{\lambda M_p}{2L} x - M_p = \frac{M_y}{2} M_p \rightarrow x = \frac{5}{12} L \approx 0.417 L$$

$$M_x = \frac{P_m}{2} x - \frac{P_m L}{\lambda} = \frac{\lambda M_p}{2L} x - M_p = -\frac{M_y}{2} M_p \rightarrow x = \frac{1}{12} L \approx 0.083 L$$

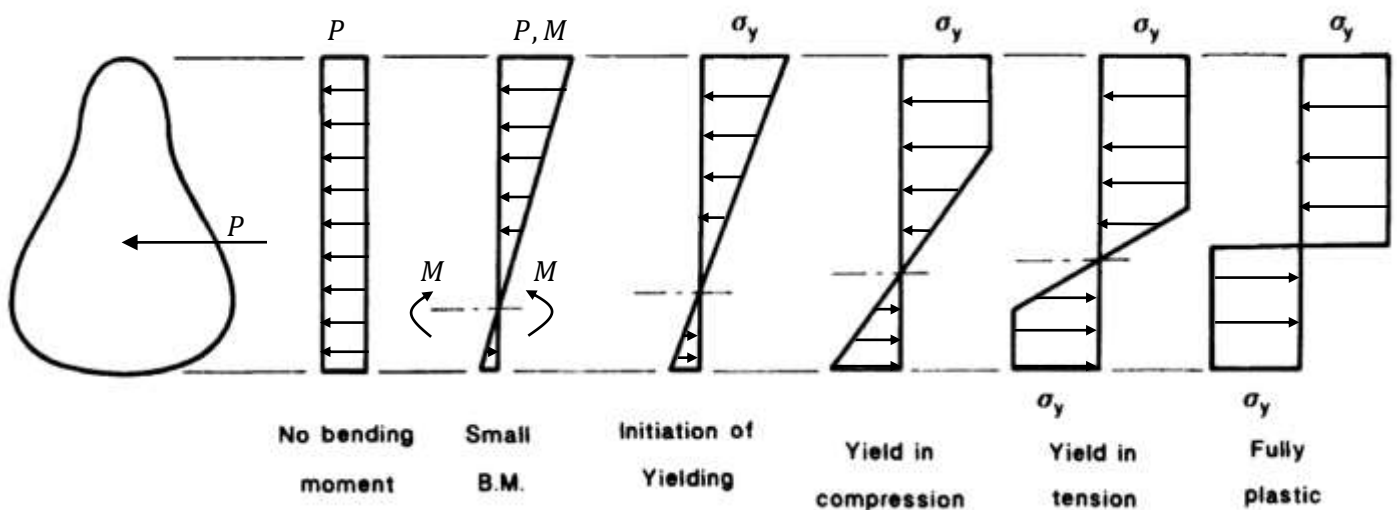


کاهش ظرفیت لنگر پلاستیک مقطع به دلیل اندرکنش نیروها (نیروی محوری یا نیروی برشی)

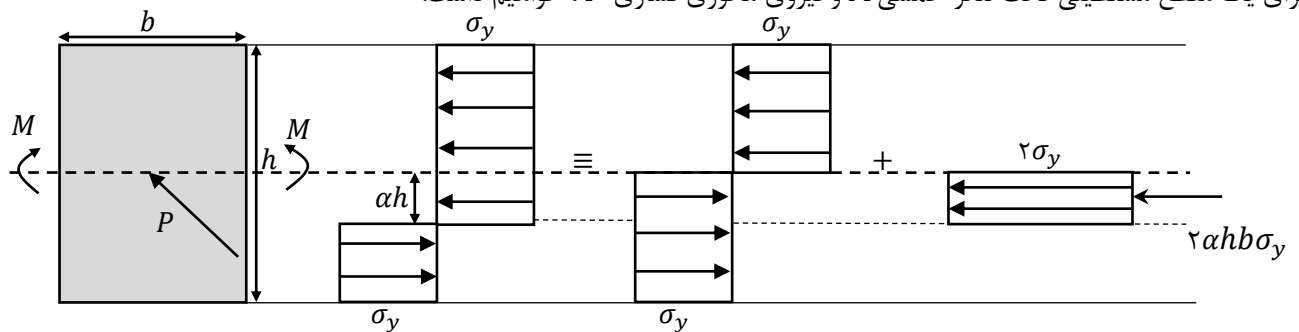
۱- ترکیب توأمان (اندرکنش) لنگر خمشی و نیروی محوری (فشاری یا کششی)

در بخش قبل به طور مفصل در مورد خمش خالص و لنگر خمشی الاستیک و پلاستیک بحث کردیم. حال این سوال پیش می آید که اگر لنگر خمشی خالص نباشد و همراه با یک نیروی محوری (کششی یا فشاری) به مقطع وارد شود، آیا ظرفیت تحمل لنگر مقطع افزایش می یابد یا کاهش پیدا می کند؟ یا به عبارتی بهتر، اندرکنش لنگر خمشی و نیروی محوری چه تأثیری بر ظرفیت تحمل لنگر مقطع می گذارد؟

لذا در این بخش می خواهیم به سوال فوق جواب بدهیم و معادله ی اندرکنش لنگر خمشی و نیروی محوری را برای برخی از مقاطع محاسبه کنیم. هرگاه یک نیروی محوری بر یک ستون کوتاه (کمانش مطرح نیست) اعمال گردد، در سراسر مقطع، تنش فشاری یکنواخت ایجاد می شود. با اضافه کردن یک لنگر خمشی کوچک، شاهد تشکیل تنشی الاستیک با تغییرات خطی در عرض مقطع خواهیم بود. با افزایش بیشتر لنگر خمشی و به ازای بار محوری ثابت، نهایتاً تسلیم در یکی از وجوه مقطع واقع می شود، که به دنبال آن تسلیم در وجه دیگر و در نهایت تسلیم در کل مقطع اتفاق می افتد. در خلال این روند، محور تنش صفر که به ازای مقادیر بسیار کوچک لنگر خمشی در خارج از مقطع قرار می گیرد، به طرف موقعیت نهایی اش در وضعیت پلاستیک کامل پیشروی می کند.



برای یک مقطع مستطیلی تحت لنگر خمشی M و نیروی محوری فشاری P ، خواهیم داشت:



$$M = M_p - (\alpha h b \sigma_y) \times \left(\frac{\alpha h}{\gamma}\right) = M_p - \alpha^2 h^2 b \sigma_y$$

همانطور که مشاهده می کنید نیرو محوری سبب کاهش ظرفیت تحمل لنگر مقطع می شود.

$$\begin{cases} M = M_p - \alpha^2 h^2 b \sigma_y \\ P = \gamma \alpha h b \sigma_y = \gamma \alpha P_p \rightarrow \alpha = \frac{P}{\gamma P_p} \end{cases}$$

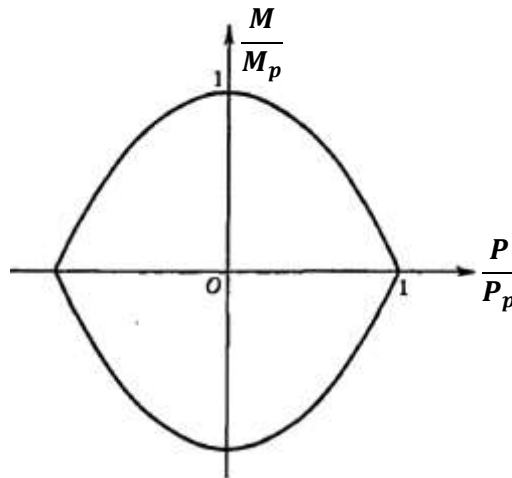
با جایگذاری مقدار α در رابطه لنگر خواهیم داشت:

$$M = M_p - \left(\frac{P}{\gamma P_p}\right)^2 h^2 b \sigma_y = M_p - \left(\frac{P}{P_p}\right)^2 \left(\frac{b h^2}{\gamma^2}\right) \sigma_y$$

$$M = M_p - \left(\frac{P}{P_p}\right)^2 M_p \rightarrow M = M_p \left[1 - \left(\frac{P}{P_p}\right)^2\right] \rightarrow \frac{M}{M_p} + \left(\frac{P}{P_p}\right)^2 = 1$$

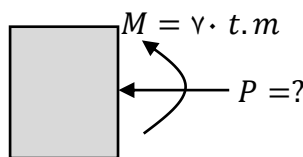
رابطه‌ی اخیر، رابطه اندرکنش لنگر خمشی و نیروی محوری برای مقطع مستطیلی می‌باشد که اگر آنرا رسم کنیم، دیاگرام آن بصورت زیر خواهد بود:

$$\frac{M}{M_p} + \left(\frac{P}{P_p}\right)^2 = 1$$



«دیاگرام اندرکنش لنگر خمشی و نیروی محوری برای مقطع مستطیلی»

مثال ۱: در مقطع مستطیلی زیر حداکثر مقدار نیروی محوری وارده را محاسبه کنید. ($M_p = 100 \text{ t.m}$ و $P_p = 200 \text{ ton}$)



حل:

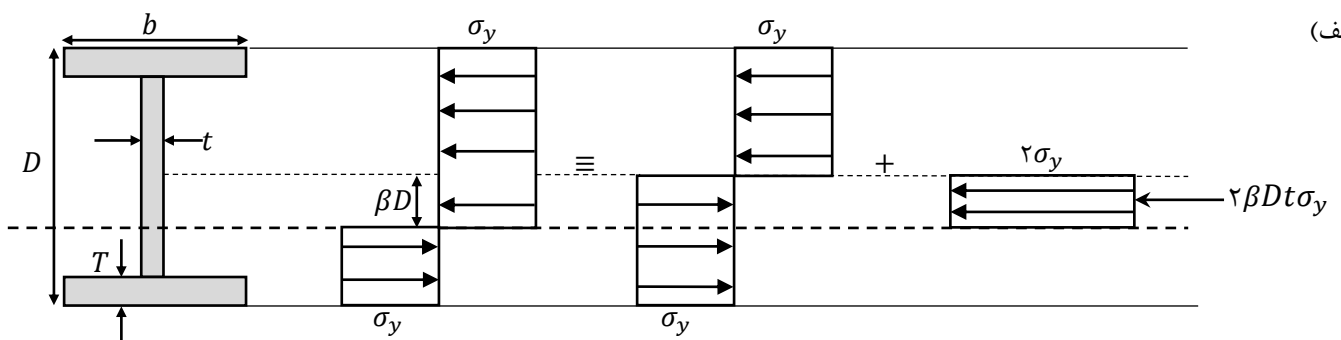
$$\frac{M}{M_p} + \left(\frac{P}{P_p}\right)^2 = 1 \rightarrow \frac{70}{100} + \left(\frac{P}{200}\right)^2 = 1 \rightarrow P = \pm 109.5 \text{ ton}$$

مثال ۲: رابطه‌ی اندرکنش لنگر خمشی و نیروی محوری را برای مقطع I شکل زیر بدست آورید.

(الف) فرض کنید محور خنثی پلاستیک در جان مقطع قرار دارد (ب) فرض کنید محور خنثی پلاستیک در بال مقطع قرار دارد.

حل:

(الف)



$$M = M_p - (2\beta D t \sigma_y) \times \left(\frac{\beta D}{2}\right) = M_p - \beta^2 D^2 t \sigma_y$$

$$P_p = A_g \sigma_y \quad M_p = Z \sigma_y$$

$$\begin{cases} M = M_p - \beta^2 D^2 t \sigma_y \\ P = 2\beta D t \sigma_y \rightarrow \beta = \frac{P}{2 D t \sigma_y} \end{cases}$$

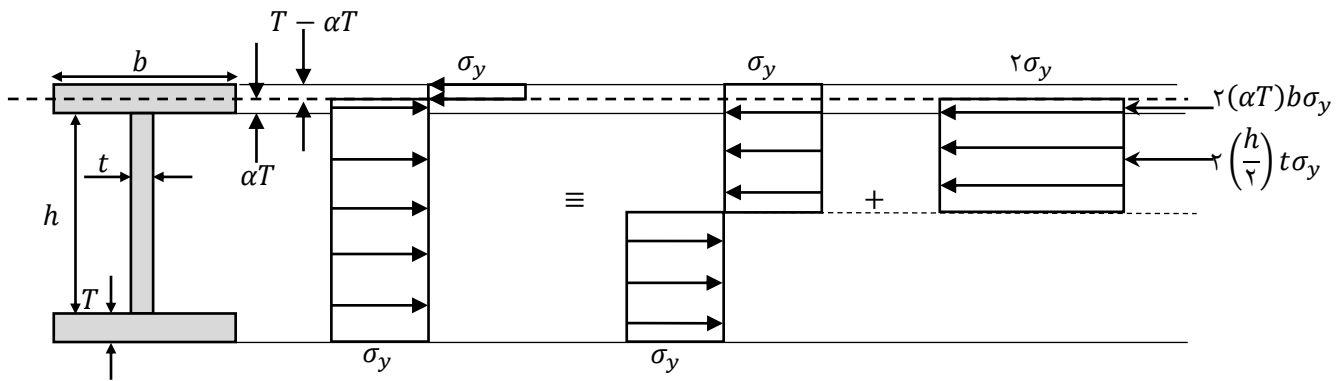
ادامه حل مثال ۲:

$$M = M_p - \left(\frac{P}{\gamma D t \sigma_y} \right) D \gamma t \sigma_y = M_p - \left(\frac{P \gamma}{\gamma D \gamma t \gamma \sigma_y \gamma} \right) D \gamma t \sigma_y \rightarrow M = M_p - \left(\frac{P \gamma}{\gamma t \sigma_y} \right) \rightarrow \frac{M}{M_p} = 1 - \frac{P \gamma}{\gamma t \sigma_y} \times \frac{1}{Z \sigma_y} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{M}{M_p} = 1 - \frac{P \gamma}{\gamma t \sigma_y} \times \frac{1}{Z \sigma_y} \times \frac{P_p \gamma}{P_p \gamma} \rightarrow \frac{M}{M_p} = 1 - \left(\frac{P \gamma}{P_p \gamma} \right) \frac{A_g \gamma \sigma_y \gamma}{\gamma t \sigma_y} \times \frac{1}{Z \sigma_y} \rightarrow \frac{M}{M_p} = 1 - \left(\frac{P \gamma}{P_p \gamma} \right) \frac{A_g \gamma}{\gamma t Z}$$

$$\frac{M}{M_p} = 1 - \left(\frac{P \gamma}{P_p \gamma} \right) \frac{A_g \gamma}{\gamma t Z}$$

(ب)



$$M = M_p - \left[(\gamma(\alpha T)b\sigma_y) \times \left(\frac{\alpha T}{\gamma} + \frac{h}{\gamma} \right) \right] - \left[\left(\gamma \left(\frac{h}{\gamma} \right) t \sigma_y \right) \times \left(\frac{h}{\gamma} \right) \right] = M_p - \left[b T \alpha \sigma_y (T \alpha + h) - h t \sigma_y \times \frac{h}{\gamma} \right]$$

$$P = \gamma(\alpha T)b\sigma_y + \gamma \left(\frac{h}{\gamma} \right) t \sigma_y = \gamma \alpha T b \sigma_y + h t \sigma_y \rightarrow \alpha = \frac{P - h t \sigma_y}{\gamma T b \sigma_y}$$

$$M = M_p - \left[\frac{P - h t \sigma_y}{\gamma} \left(\frac{P - h t \sigma_y}{\gamma b \sigma_y} + h \right) + h t \sigma_y \times \frac{h}{\gamma} \right]$$

$$\frac{M}{M_p} = 1 - \frac{1}{Z \sigma_y} \times \frac{A_g \gamma \sigma_y \gamma}{P_p \gamma} \left[\frac{P - h t \sigma_y}{\gamma} \left(\frac{P - h t \sigma_y}{\gamma b \sigma_y} + h \right) + \frac{h \gamma t \sigma_y}{\gamma} \right]$$

$$\frac{M}{M_p} = 1 - \frac{1}{\gamma Z} \times \frac{A_g \gamma \sigma_y}{P_p \gamma} \left[(P - h t \sigma_y) \left(\frac{P - h t \sigma_y}{b \sigma_y} + \gamma h \right) + h \gamma t \sigma_y \right]$$

$$\frac{M}{M_p} = 1 - \frac{1}{\gamma Z} \left[\left(\frac{A_g \gamma \left(\frac{P}{P_p} \right) \gamma}{b} - A_g \left(\frac{P}{P_p} \right) \gamma h t + h \gamma t \gamma + A_g \left(\frac{P}{P_p} \right) \times \gamma h b - \gamma h \gamma b t \right) + h \gamma t \right]$$

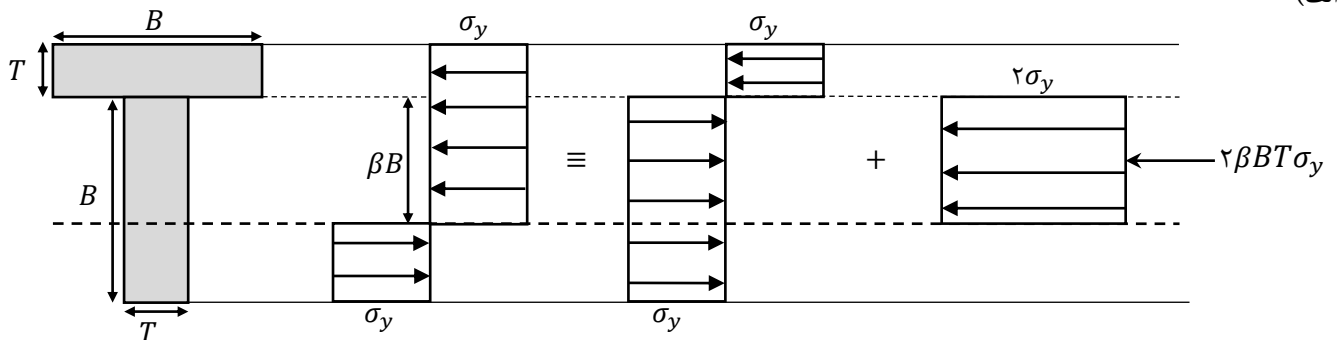
$$\frac{M}{M_p} = 1 - \frac{1}{\gamma Z} \left[\left(\frac{A_g \left(\frac{P}{P_p} \right) - h t \right) \gamma}{b} + \gamma h \left(A_g \left(\frac{P}{P_p} \right) - h t \right) + h \gamma t \right]$$

مثال ۳: رابطه‌ی اندرکنش لنگر خمشی و نیروی محوری را برای مقطع T شکل (سپری) زیر بدست آورید.

(الف) فرض کنید محور خنثی پلاستیک در جان مقطع قرار دارد (ب) فرض کنید محور خنثی پلاستیک در بال مقطع قرار دارد.

حل:

(الف)



$$M = M_p - \left[(2\beta BT\sigma_y) \times \left(\frac{\beta B}{2} \right) \right]$$

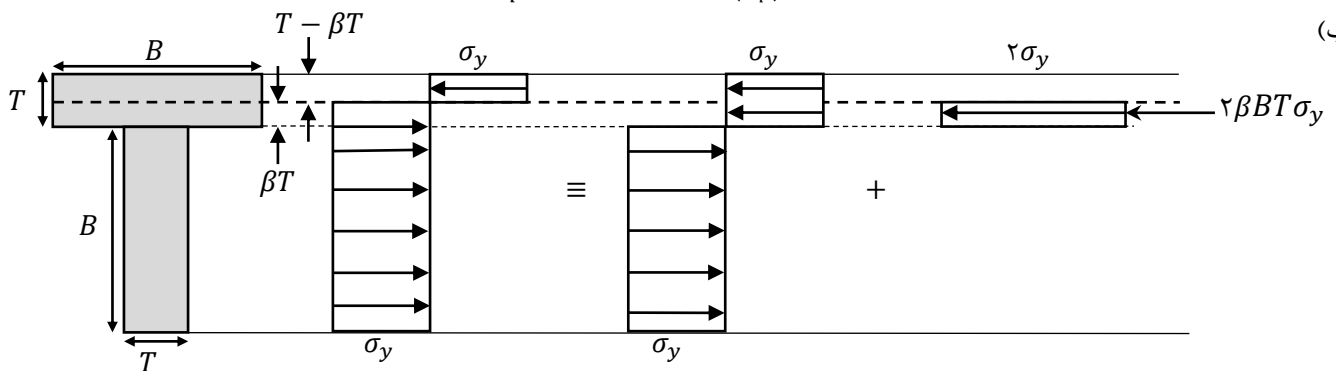
$$P = 2\beta BT\sigma_y \rightarrow \beta = \frac{P}{2BT\sigma_y}$$

$$M = M_p - \left[\left(2 \times \frac{P}{2BT\sigma_y} BT\sigma_y \right) \times \left(\frac{\frac{P}{2BT\sigma_y} B}{2} \right) \right] = M_p - \left[P \times \left(\frac{P}{2T\sigma_y} \right) \right] = M_p - \left(\frac{P^2}{2T\sigma_y} \right)$$

$$\frac{M}{M_p} = 1 - \frac{1}{Z\sigma_y} \frac{A_g \sigma_y}{P_p} \left(\frac{P^2}{2T\sigma_y} \right) = 1 - \frac{A_g}{2TZ} \left(\frac{P}{P_p} \right)^2 = 1 - \frac{(2BT)^2}{2T(BT^2 + TB^2)} \left(\frac{P}{P_p} \right)^2 = 1 - \frac{2TB^2}{(BT^2 + TB^2)} \left(\frac{P}{P_p} \right)^2$$

$$\frac{M}{M_p} = 1 - \frac{2B}{(T+B)} \left(\frac{P}{P_p} \right)^2$$

(ب)



$$M = M_p - \left[(2\beta BT\sigma_y) \times \left(\frac{\beta T}{2} \right) \right]$$

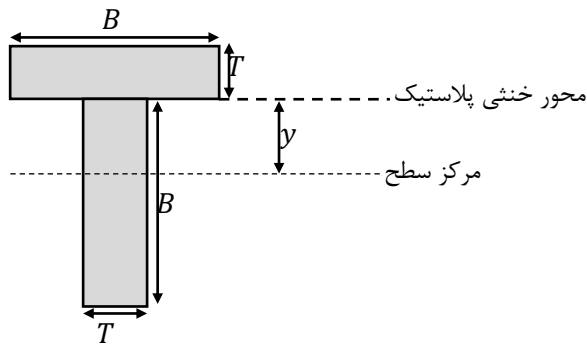
$$P = 2\beta BT\sigma_y \rightarrow \beta = \frac{P}{2BT\sigma_y}$$

$$M = M_p - \left[\left(2 \times \frac{P}{2BT\sigma_y} BT\sigma_y \right) \times \left(\frac{\frac{P}{2BT\sigma_y} T}{2} \right) \right] = M_p - \left[P \times \left(\frac{P}{2B\sigma_y} \right) \right] = M_p - \left(\frac{P^2}{2B\sigma_y} \right)$$

$$\frac{M}{M_p} = 1 - \frac{1}{Z\sigma_y} \frac{A_g \sigma_y}{P_p} \left(\frac{P^2}{2B\sigma_y} \right) = 1 - \frac{A_g}{2BZ} \left(\frac{P}{P_p} \right)^2 = 1 - \frac{(2BT)^2}{2B(BT^2 + TB^2)} \left(\frac{P}{P_p} \right)^2 = 1 - \frac{2T^2 B}{(BT^2 + TB^2)} \left(\frac{P}{P_p} \right)^2$$

$$\frac{M}{M_p} = 1 - \frac{2T}{(T+B)} \left(\frac{P}{P_p} \right)^2$$

مثال ۴*: رابطه‌ی اندرکنش لنگر خمشی و نیروی محوری را برای مقطع T شکل (سپری) زیر برای حالتی که نیروی محوری بر مرکز سطح مقطع اعمال شود، بدست آورید.



$$y = \frac{\left(BT \times \frac{T}{2}\right) + \left(BT \times \left(-\frac{B}{2}\right)\right)}{2BT} = \frac{T - B}{2}$$

$$M = M_p \left(1 - \frac{2B}{(T+B)} \left(\frac{P}{P_p} \right)^2 \right) - Py = M_p \left(1 - \frac{2B}{(T+B)} \left(\frac{P}{P_p} \right)^2 \right) - \left[\frac{P}{P_p} \times (2BT\sigma_y) \left(\frac{T-B}{2} \right) \right]$$

$$M = M_p \left(1 - \frac{2B}{(T+B)} \left(\frac{P}{P_p} \right)^2 \right) - \frac{M_p}{\left(\frac{BT^2}{2} + \frac{TB^2}{2} \right) \sigma_y} \left[\frac{P}{P_p} \times (2BT\sigma_y) \left(\frac{T-B}{2} \right) \right]$$

$$\frac{M}{M_p} = \left[1 - \frac{2B}{(T+B)} \left(\frac{P}{P_p} \right)^2 - \frac{(T-B)}{T+B} \left(\frac{P}{P_p} \right) \right]$$

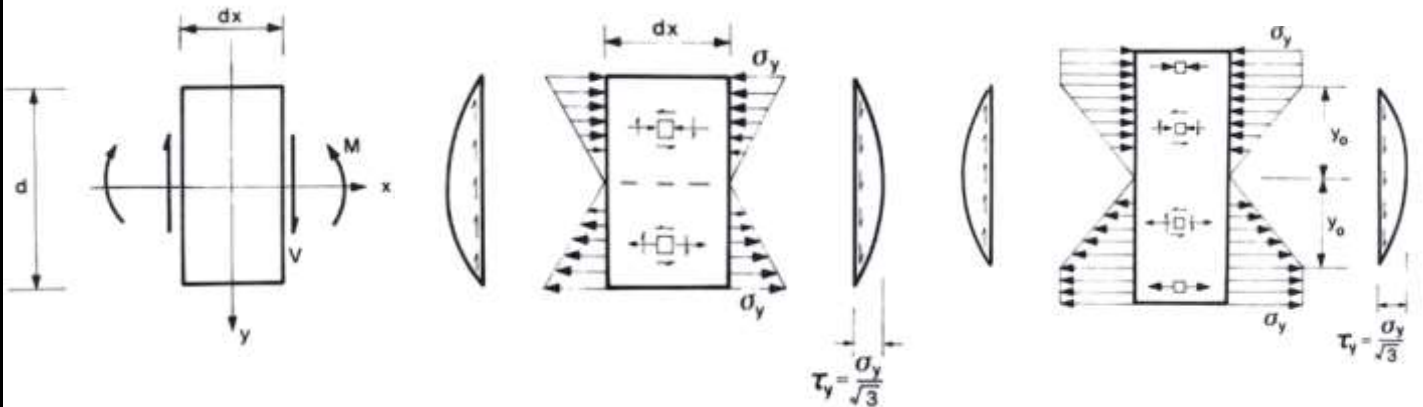
۲- ترکیب توأمان (اندرکنش) لنگر خمشی و نیروی برشی *

اثر نیروی برشی در یک تیر که شکل مقطع آن کلی است، بسیار پیچیده تر از اثر نیروی محوری می باشد. در این حالت برآیند تنش ها می تواند به تنش های ناشی از خمش ملحق گردند و این امر ناشی از طولی بودن این تنش ها می باشد. در هر حال، الحاق برش به خمش منجر به یک سیستم تنش دو بعدی می گردد که بحث پیرامون رفتار پلاستیک تحت این شرایط خارج از بحث این درس است. لذا بعضی از حالت های خاص را بررسی می کنیم. طبق معیار تسلیم فون مایسز داریم:

$$\sigma^2 + 3\tau^2 \leq \sigma_y^2$$

$$\dot{\sigma}^2 + 3\tau^2 \leq \sigma_y^2 \rightarrow \tau \leq \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \rightarrow \tau_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}$$

مقطع مستطیلی زیر را در نظر بگیرید، که همزمان تحت خمش و برش قرار دارد:



در ناحیه الاستیک می دانیم که:

$$\frac{\sigma}{\sigma_y} = \frac{y}{\frac{d}{2}} \rightarrow \sigma = \sigma_y \frac{2y}{d}$$

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_y^2 \rightarrow \left(\sigma_y \frac{2y}{d}\right)^2 + 3\tau^2 = \sigma_y^2 \rightarrow \tau_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{2y}{d}\right)^2} \right]$$

$$M_y = S\sigma_y = \frac{bd^3}{12}\sigma_y = \frac{2}{3}M_p$$

$$\tau_y = \frac{2}{3} \times \frac{V}{A} \rightarrow V = \frac{3}{2} \times A \times \tau_y \rightarrow V = \frac{3}{2} \times A \times \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \rightarrow V = \frac{3}{2} \times \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} bd$$

در ناحیه پلاستیک می دانیم که:

$$M = M_p \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{2y}{d} \right)^2 \right]$$

$$V = \frac{3}{2} \times \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} b(2y) \rightarrow V = \frac{3}{2} \times \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} by \rightarrow y = \frac{2}{3} \times \sqrt{3} \times \frac{V}{b\sigma_y}$$

$$V_p = bd\tau_y = \frac{bd}{\sqrt{3}}\sigma_y$$

لذا:

$$\begin{aligned} \frac{M}{M_p} &= \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{2y}{d} \right)^2 \right] = \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{V}{b\sigma_y}}{d} \right)^2 \right] = \left[1 - \frac{\frac{4}{3} \times \frac{V^2}{b^2\sigma_y^2}}{d^2} \right] = 1 - \frac{4V^2}{3b^2d^2\sigma_y^2} = 1 - \frac{4V^2}{3b^2d^2(2\tau_y)^2} \\ &= 1 - \frac{4V^2}{12b^2d^2\tau_y^2} = 1 - \frac{3V^2}{4b^2d^2\tau_y^2} = 1 - \frac{3V^2}{4V_p^2} \rightarrow \frac{M}{M_p} = 1 - \frac{3V^2}{4V_p^2} = 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{V}{V_p} \right)^2 \end{aligned}$$

لذا اندرکنش لنگر خمشی و نیروی برشی برای یک مقطع مستطیلی بصورت زیر است:

$$\frac{M}{M_p} = 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{V}{V_p} \right)^2$$

البته دراکر (Drucker) برای اهداف طراحی، رابطه زیر را پیشنهاد کرده است:

$$\frac{M}{M_p} = 1 - \left(\frac{V}{V_p} \right)^4$$

۳- ترکیب توأمان (اندرکنش) لنگر خمشی و نیروی محوری و نیروی برشی*

طبق رابطه پیشنهادی دراکر (Drucker) اندرکنش لنگر خمشی و نیروی محوری و نیروی برشی برای مقطع مستطیلی بصورت زیر خواهد بود:

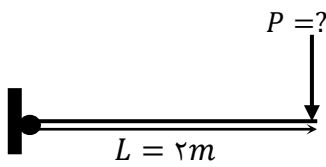
$$\frac{M}{M_p} + \left(\frac{P}{P_p} \right)^2 + \frac{\left(\frac{V}{V_p} \right)^4}{1 - \left(\frac{P}{P_p} \right)^2} = 1$$

فصل دوم

«تیرها و قاب های ساده»

مقدمه

تعیین لنگر خمشی، تقریباً قسمت اساسی اولیه از تحلیل یا طراحی تیرها و قاب ها را تشکیل می دهد. برای مثال، تیر طره زیر را در نظر بگیرید. از ما خواسته شده است که باری که باعث خرابی تیر می شود را تعیین کنید، لذا:



فرض : $M_y = 80 \text{ kN.m}$, $M_p = 100 \text{ kN.m}$

شروع خرابی $M_y = PL \rightarrow P_{\text{تسلیم}} = \frac{M_y}{L} = \frac{80}{2} = 40 \text{ kN}$

$M_p = PL \rightarrow P_{\text{نهایی}} = \frac{M_p}{L} = \frac{100}{2} = 50 \text{ kN}$

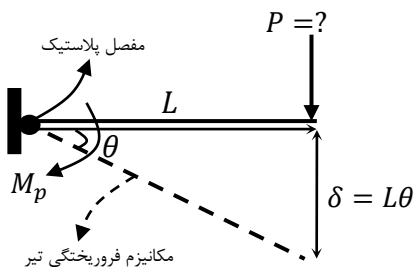
همانطور که مشاهده می کنید برای تعیین بار خرابی و تسلیم تیر، تعیین لنگر خمشی بسیار اهمیت دارد. اگر تیر کمی پیچیده باشد و یا سیستم مورد تحلیل به شکل قاب باشد، تعیین لنگر به روش فوق الذکر (روش استاتیکی) کمی دشوار و زمانگیر خواهد شد. لذا از روش دیگری برای محاسبه بار خرابی استفاده خواهیم کرد.

روش انرژی (روش مکانیزم)

مطابق این روش، تمامی مکانیزم های احتمالی فروپاشی سیستم شناسایی شده و معادله ی کار مجازی داخلی برای هر مکانیزم تشکیل می شود. فروپاشی برای هر مکانیزم تعیین می شود. باری که اندازه آن کمترین باشد، به عنوان بار فروپاشی لازم برای مکانیزم شدن سیستم انتخاب می شود. در ایجاد معادله ی کار مجازی، کار داخلی کل به عنوان مجموع حاصل ضرب لنگر پلاستیک M_p و دوران پلاستیک مربوطه θ در تمام نقاط مفاصل پلاستیک، باید برابر با کار خارجی کل باشد. کار خارجی کل به عنوان مجموع حاصل ضرب نیروهای خارجی اعمالی و جابجایی مربوطه در محل تمام نیروها بیان می شود.

$$\sum \overbrace{M_p \theta_i}^{\text{کار داخلی}} = \sum \overbrace{P_i \delta_i}^{\text{کار خارجی}}$$

حالا مثال نمونه را به روش انرژی حل می کنیم:



کار خارجی = کار داخلی

$$M_p \times \theta = P \times L\theta$$

$$P = \frac{M_p \theta}{L\theta} \rightarrow P = \frac{M_p}{L}$$

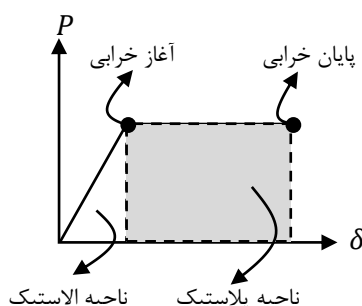
همانطور که مشاهده می کنید پاسخ ها (در روش استاتیکی و روش انرژی) دقیقاً بر هم منطبق هستند.

لازم به ذکر است که اگر تحلیل الاستیک مورد بررسی بود، انرژی داخلی (کار داخلی) با توجه به منحنی نیرو- تغییرمکان بصورت زیر محاسبه می شد:

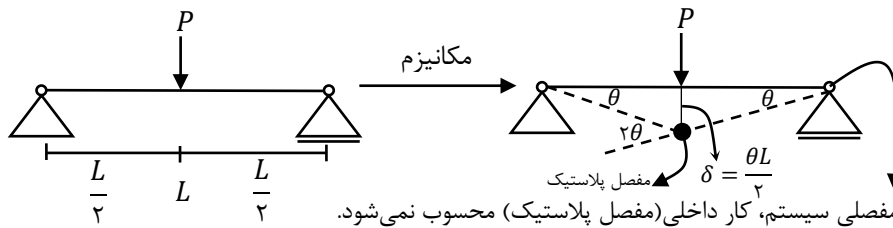
$$W = \frac{1}{2} P \delta \quad \text{کار داخلی (مساحت مثلث)}$$

ولی در تحلیل پلاستیک از ناحیه الاستیک صرف نظر می کنیم. لذا:

$$W = P \delta \quad \text{کار داخلی (مساحت مستطیل)}$$



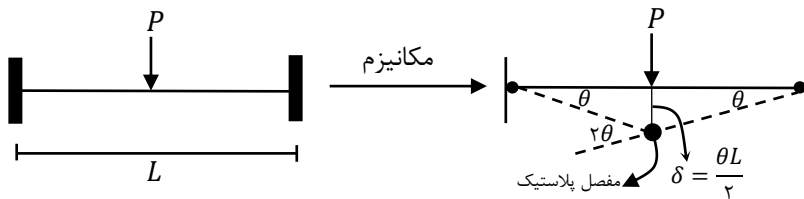
مثال ۱: بار نهایی (فروریختگی) هر یک از سیستم های زیر را به روش انرژی تعیین کنید.



کار خارجی = کار داخلی

$$M_p \times 2\theta = P \times \frac{\theta L}{2}$$

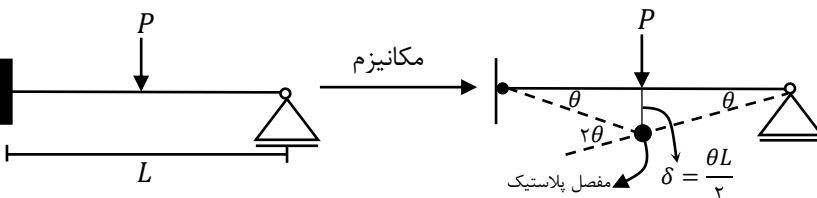
$$P = \frac{2 \times 2M_p \theta}{L\theta} \rightarrow P = \frac{4M_p}{L}$$



کار خارجی = کار داخلی

$$M_p \theta + M_p \theta + M_p \times 2\theta = P \times \frac{\theta L}{2}$$

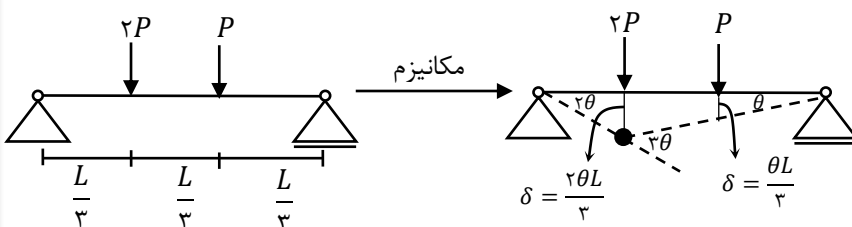
$$P = \frac{2 \times 4M_p \theta}{\theta L} \rightarrow P = \frac{8M_p}{L}$$



کار خارجی = کار داخلی

$$M_p \theta + M_p \times 2\theta = P \times \frac{\theta L}{2}$$

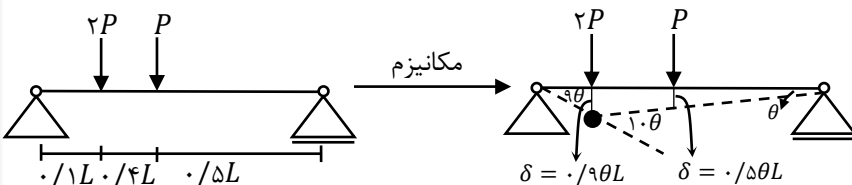
$$P = \frac{2 \times 2M_p \theta}{\theta L} \rightarrow P = \frac{6M_p}{L}$$



کار خارجی = کار داخلی

$$M_p \times 3\theta = 2P \times \frac{2\theta L}{3} + P \times \frac{\theta L}{3}$$

$$P = \frac{3 \times 2M_p \theta}{5L\theta} \rightarrow P = \frac{6M_p}{5L}$$

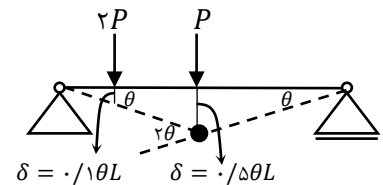


کار خارجی = کار داخلی

$$M_p \times 1.0\theta = 2P \times 0.75\theta L + P \times 0.25\theta L$$

$$P = \frac{1.0M_p \theta}{2.75\theta L} \rightarrow P \approx \frac{4}{35} \frac{M_p}{L}$$

یا



کار خارجی = کار داخلی

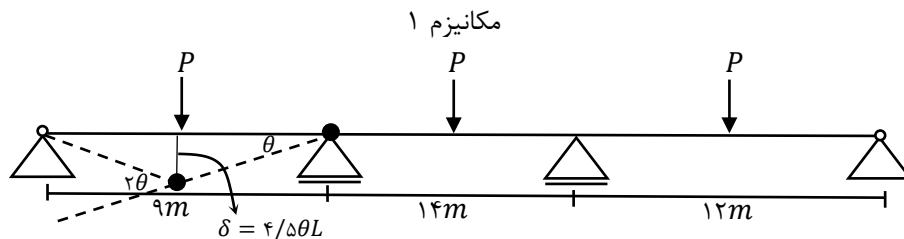
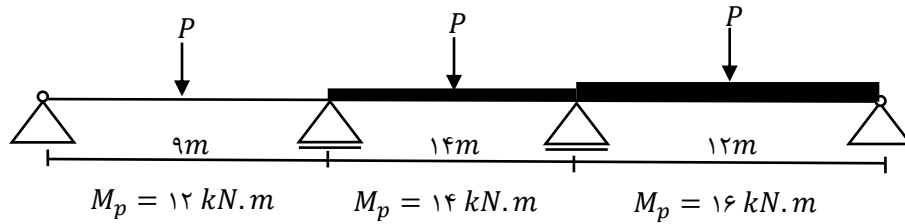
$$M_p \times 2\theta = 2P \times 0.25\theta L + P \times 0.75\theta L$$

$$P = \frac{2M_p \theta}{0.75\theta L} \rightarrow P \approx \frac{2}{18} \frac{M_p}{L}$$

اگر چند مکانیزم بررسی شود، مکانیزم خرابی، مکانیزمی است که بار خرابی آن کمتر باشد.

ادامه حل مثال ۱:

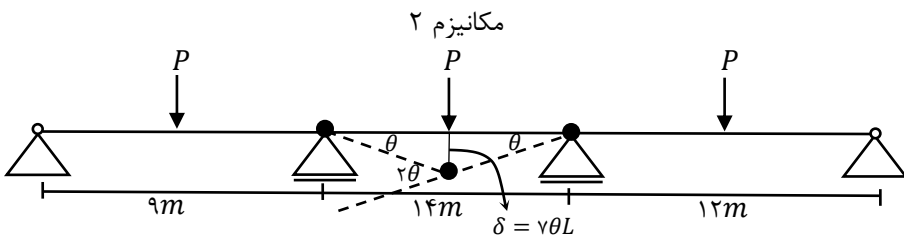
*



کار خارجی = کار داخلی

$$M_p \times 2\theta = P \times 4/5 \theta L$$

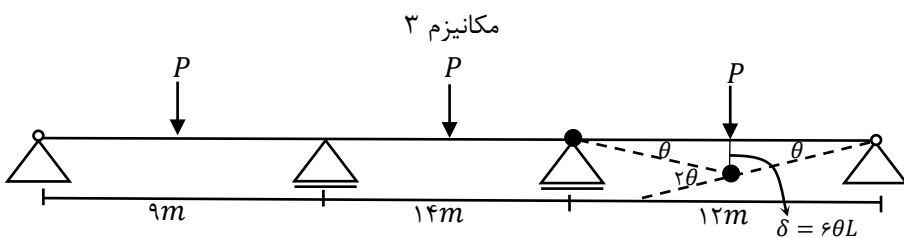
$$P = \frac{2M_p \theta}{4/5 \theta L} \rightarrow P \approx 0.67 \frac{M_p}{L}$$



کار خارجی = کار داخلی

$$M_p \times 4\theta = P \times 7\theta L$$

$$P = \frac{4M_p \theta}{7\theta L} \rightarrow P \approx 0.57 \frac{M_p}{L}$$

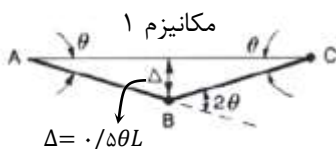
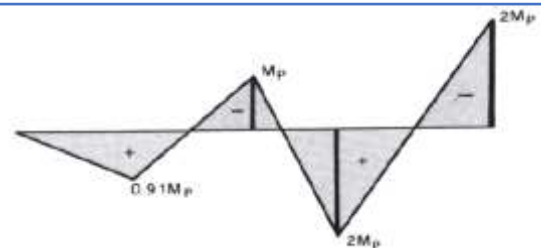
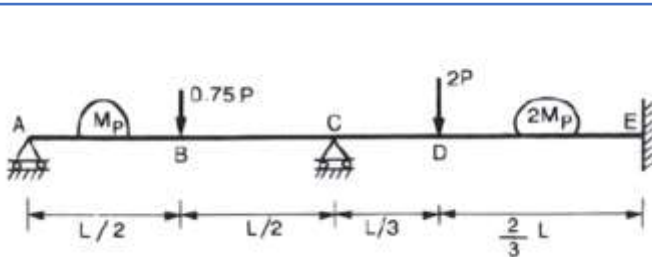


کار خارجی = کار داخلی

$$M_p \times 2\theta = P \times 6\theta L$$

$$P = \frac{2M_p \theta}{6\theta L} \rightarrow P = 0.33 \frac{M_p}{L}$$

چون در حالت ۳ بار خرابی کمترین مقدار است. لذا مکانیزم ۳ بعنوان مکانیزم بحرانی انتخاب می شود.

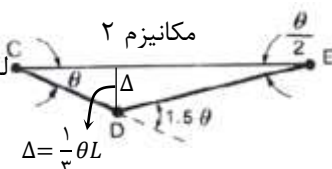


کار خارجی = کار داخلی

$$M_p \times 2\theta + M_p \times \theta = 0.75P \times 1/5 \theta L$$

$$P = \frac{2M_p \theta}{(0.75 \times 1/5) \theta L} \rightarrow P = 8 \frac{M_p}{L}$$

لنگر پلاستیک تکیه گاه C برابر M_p است.



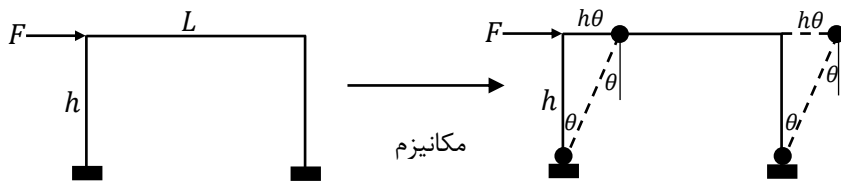
کار خارجی = کار داخلی

$$M_p \times \theta + 2M_p \times \frac{\theta}{3} + 2M_p \times 1/5 \theta = 2P \times \frac{1}{3} \theta L$$

$$P = \frac{5M_p \theta}{(1/3) \theta L} \rightarrow P = 6 \frac{M_p}{L}$$

لذا مکانیزم ۲ بحرانی تر است.

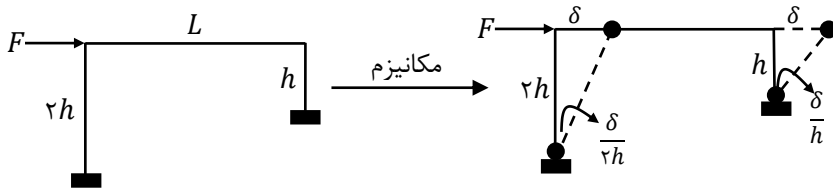
ادامه حل مثال ۱:



کار خارجی = کار داخلی

$$M_p \times \varphi \theta = F \times h \theta$$

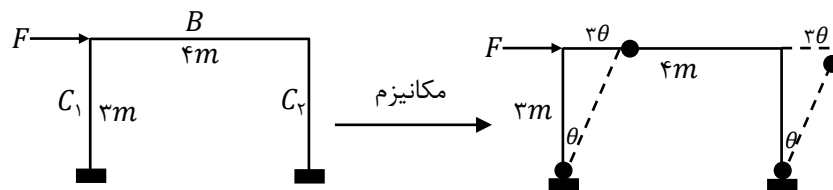
$$F = \frac{\varphi M_p \theta}{h \theta} \rightarrow F = \varphi \frac{M_p}{h}$$



کار خارجی = کار داخلی

$$M_p \times \left(\frac{\delta}{2h} + \frac{\delta}{2h} + \frac{\delta}{h} + \frac{\delta}{h} \right) = F \times \delta$$

$$F = 3 \frac{M_p}{h}$$



فرضیات:

$$M_{C_1} = 20 \text{ kN.m}$$

$$M_{C_2} = 8 \text{ kN.m}$$

$$M_B = 10 \text{ kN.m}$$

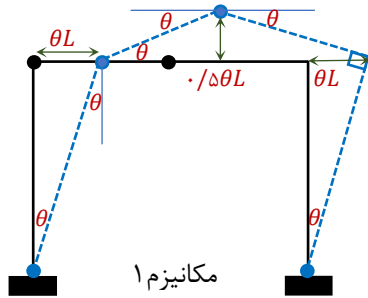
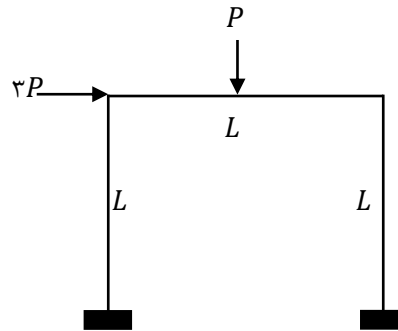
چون ظرفیت لنگر پلاستیک ستون ۱ بیشتر از تیر است، لذا مفصل پلاستیک در تیر تشکیل می‌شود. همچنین چون ظرفیت لنگر پلاستیک ستون ۲ بیشتر از تیر است، لذا مفصل پلاستیک در ستون ۲ تشکیل می‌شود.

کار خارجی = کار داخلی

$$(20 \cdot \theta) + (10 \cdot \theta) + (8 \cdot \theta) + (8 \cdot \theta) = F \times 3 \theta$$

$$F = \frac{46 \cdot \theta}{3 \theta} \rightarrow F \approx 153/33 \text{ kN}$$

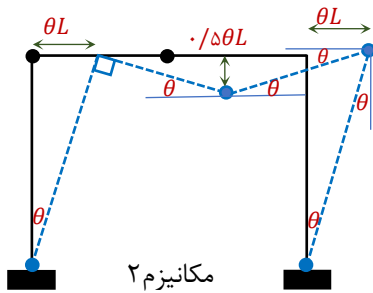
ادامه حل مثال ۱:



کار خارجی = کار داخلی

$$(M_p \times \theta) + (M_p \times 2\theta) + (M_p \times 2\theta) + (M_p \times \theta) = 3P \times \theta L - P \times \cdot / \delta \theta L$$

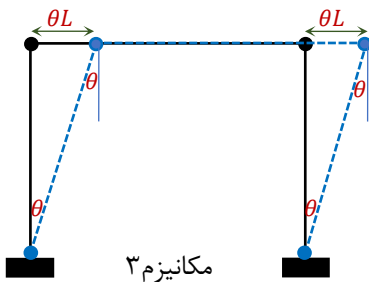
$$P = \frac{6M_p \theta}{2/\delta \theta L} \rightarrow P \simeq 2/4 \frac{M_p}{L}$$



کار خارجی = کار داخلی

$$(M_p \times \theta) + (M_p \times 2\theta) + (M_p \times 2\theta) + (M_p \times \theta) = 3P \times \theta L + P \times \cdot / \delta \theta L$$

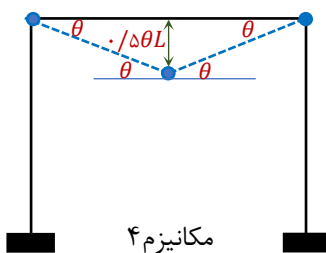
$$P = \frac{6M_p \theta}{3/\delta \theta L} \rightarrow P \simeq 1/11 \frac{M_p}{L}$$



کار خارجی = کار داخلی

$$(M_p \times \theta) + (M_p \times \theta) + (M_p \times \theta) + (M_p \times \theta) = 3P \times \theta L$$

$$P = \frac{4M_p \theta}{2\theta L} \rightarrow P \simeq 1/33 \frac{M_p}{L}$$



کار خارجی = کار داخلی

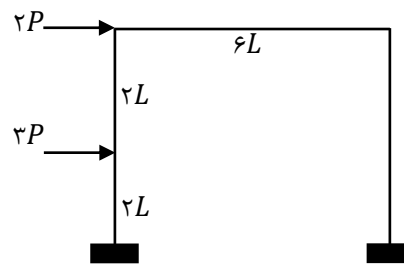
$$(M_p \times \theta) + (M_p \times 2\theta) + (M_p \times \theta) = P \times \cdot / \delta \theta L$$

$$P = \frac{4M_p \theta}{\cdot / \delta \theta L} \rightarrow P = 8 \frac{M_p}{L}$$

لذا مکانیزم ۳، بحرانی تر است.

ادامه حل مثال ۱:

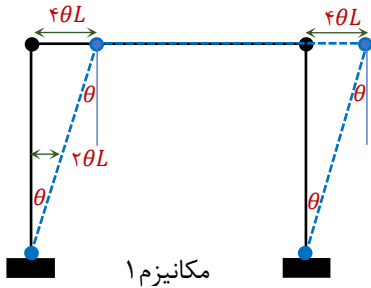
*



کار خارجی = کار داخلی

$$(M_p \times \theta) + (M_p \times \theta) + (M_p \times \theta) + (M_p \times \theta) = 2P \times 2\theta L + P \times 4\theta L$$

$$P = \frac{4M_p \theta}{14\theta L} \rightarrow P \approx 0.29 \frac{M_p}{L}$$

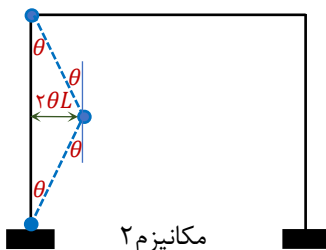


مکانیزم ۱

کار خارجی = کار داخلی

$$(M_p \times \theta) + (M_p \times \theta) + (M_p \times 2\theta) = 2P \times 2\theta L$$

$$P = \frac{4M_p \theta}{6\theta L} \rightarrow P \approx 0.67 \frac{M_p}{L}$$

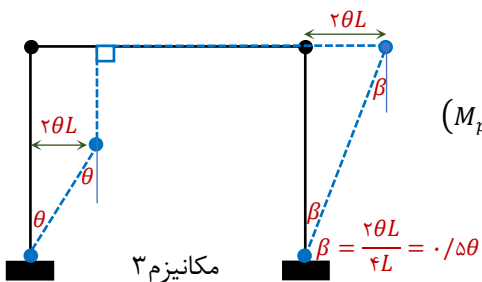


مکانیزم ۲

کار خارجی = کار داخلی

$$(M_p \times \theta) + (M_p \times \theta) + (M_p \times 0.5\theta) + (M_p \times 0.5\theta) = 2P \times 2\theta L + P \times 2\theta L$$

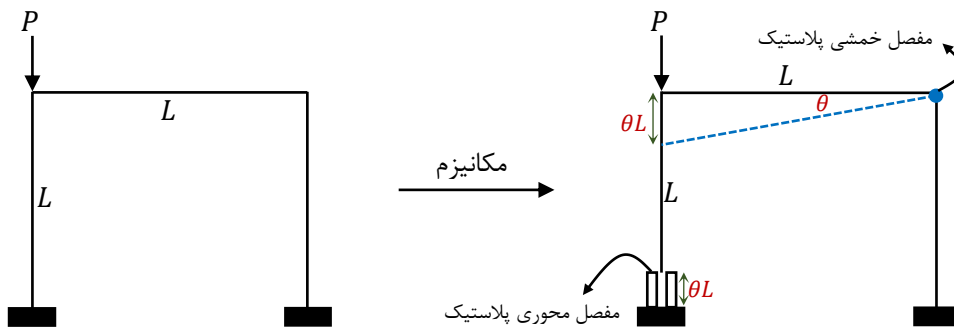
$$P = \frac{2M_p \theta}{10\theta L} \rightarrow P = 0.2 \frac{M_p}{L}$$



مکانیزم ۳

لذا مکانیزم ۱ بحرانی تر است.

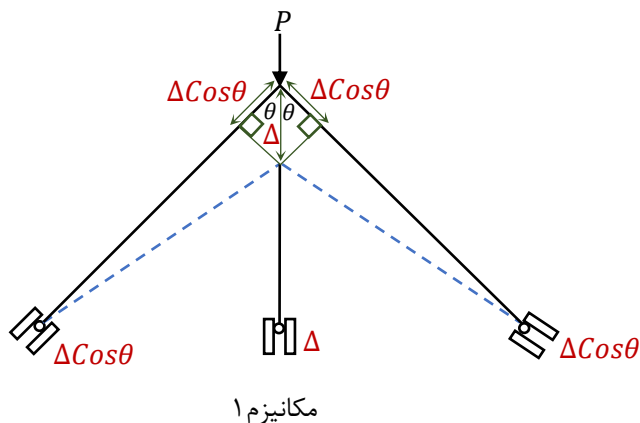
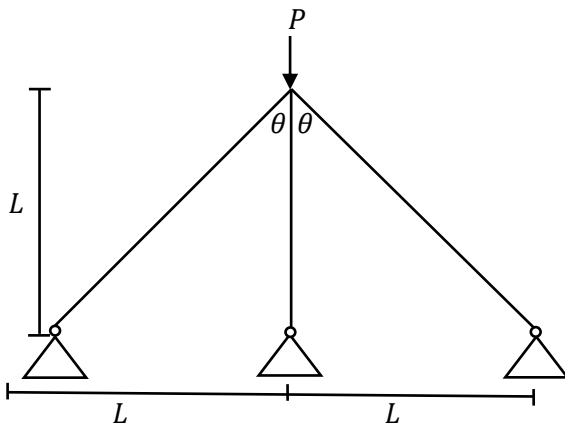
ادامه حل مثال ۱:



کار خارجی = کار داخلی

$$M_p \times \theta + P_p \theta L = P \times \theta L$$

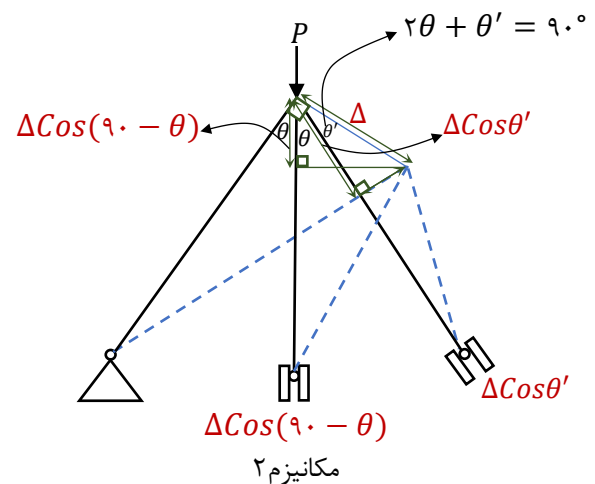
$$P = \frac{M_p}{L} + P_p$$



کار خارجی = کار داخلی

$$2(P_p \times \Delta \cos \theta) + P_p \Delta = P \Delta$$

$$P = P_p (1 + 2 \cos \theta)$$



کار خارجی = کار داخلی

$$(P_p \times \Delta \cos \theta') + P_p \Delta \cos (90^\circ - \theta) = P \Delta \cos (90^\circ - \theta)$$

$$(P_p \times \Delta \cos (90^\circ - 2\theta) + P_p \Delta \cos (90^\circ - \theta) = P \Delta \cos (90^\circ - \theta)$$

$$P = P_p \left[\frac{\cos (90^\circ - 2\theta) + \cos (90^\circ - \theta)}{\cos (90^\circ - \theta)} \right]$$

$$\xrightarrow{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta} P = P_p \left[\frac{\sin (2\theta) + \sin (\theta)}{\sin (\theta)} \right] = P_p (1 + 2 \cos \theta)$$

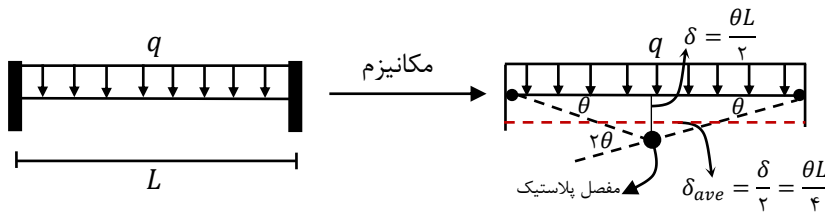
اثبات: $\frac{\sin (2\theta) + \sin (\theta)}{\sin (\theta)} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta + \sin \theta}{\sin (\theta)} = \frac{\sin \theta (2 \cos \theta + 1)}{\sin (\theta)} = (1 + 2 \cos \theta)$

بار بحرانی برای هر دو مکانیزم برابر است، لذا هر دو حالت ممکن است رخ بدهد.

ادامه حل مثال ۱:

*

روش اول:



کار خارجی = کار داخلی

$$M_p \theta + M_p \theta + M_p \times 2\theta = qL \times \frac{\theta L}{4}$$

$$q = \frac{4 \times 4 M_p \theta}{\theta L^2} \rightarrow q = \frac{16 M_p}{L^2}$$

روش دوم:

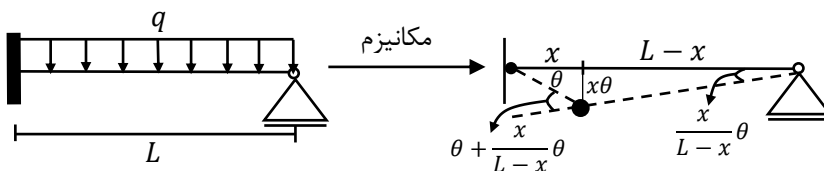
$$q \times \left(\frac{\theta L}{2} \times L \times \frac{1}{2} \right) = \frac{q \theta L^2}{2}$$

کار خارجی = کار داخلی

$$M_p \theta + M_p \theta + M_p \times 2\theta = \frac{q \theta L^2}{2}$$

$$q = \frac{4 \times 4 M_p \theta}{\theta L^2} \rightarrow q = \frac{16 M_p}{L^2}$$

*



موقعیت مفصل پلاستیک میانی تیر مشخص نیست.

کار خارجی = کار داخلی

$$M_p \theta + M_p \left(\theta + \frac{x}{L-x} \theta \right) = \tilde{Q} \times \frac{x \theta}{2}$$

$$Q = \frac{2 \times \left[M_p \theta + M_p \left(\theta + \frac{x}{L-x} \theta \right) \right]}{x \theta} = \frac{2 M_p \left[1 + \left(\frac{L}{L-x} \right) \right]}{x} = \frac{2 M_p \left(\frac{2L-x}{L-x} \right)}{x} = \frac{2 M_p (2L-x)}{x(L-x)}$$

$$\rightarrow Q = 2 M_p \times \frac{(2L-x)}{x(L-x)}$$

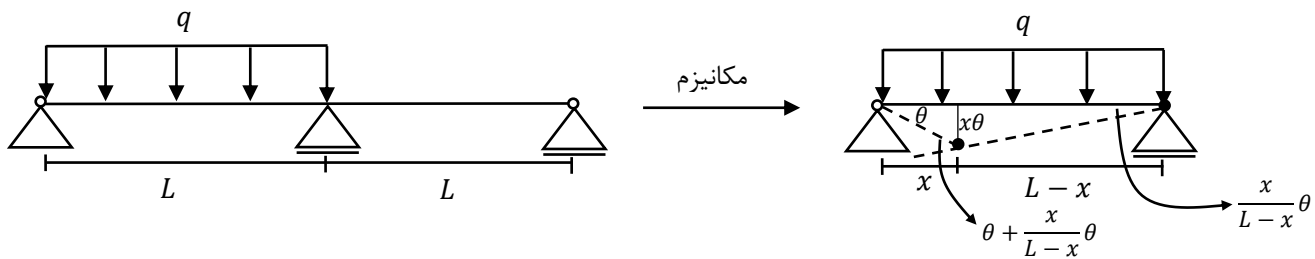
به ازای x های متفاوت برای q جوابهای مختلفی حاصل می شود. لذا برای ما کمترین مقدار ممکن برای q که بیانگر بار بحرانی است، مهم است. لذا با مشتق گیری و یافتن مقدار اکسترمم برای q خواهیم داشت:

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \rightarrow 2 M_p \times \left(\frac{-(xL - x^2) - (L - 2x)(2L - x)}{(xL - x^2)^2} \right) = 0 \rightarrow x = (2 - \sqrt{2}) L$$

$$Q = 2 M_p \times \frac{(2L - (2 - \sqrt{2}) L)}{L(2 - \sqrt{2}) \times L(1 - (2 - \sqrt{2}))} = \frac{(2\sqrt{2}) M_p L}{(-4 + 3\sqrt{2}) L^2} \rightarrow Q = (6 + 4\sqrt{2}) \frac{M_p}{L}$$

$$q = (6 + 4\sqrt{2}) \frac{M_p}{L^2}$$

ادامه حل مثال ۱:



کار خارجی = کار داخلی

$$M_p \left(\frac{x}{L-x} \theta \right) + M_p \left(\theta + \frac{x}{L-x} \theta \right) = \bar{Q} \times \frac{x\theta}{r}$$

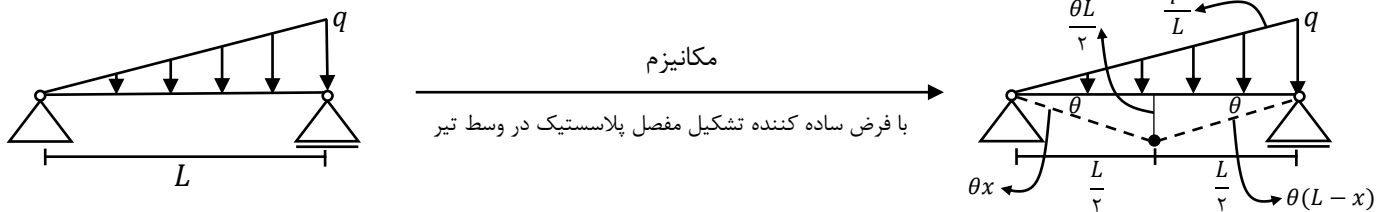
$$Q = \frac{r \left[M_p \left(\frac{x}{L-x} \theta \right) + M_p \left(\theta + \frac{x}{L-x} \theta \right) \right]}{x\theta} = \frac{r M_p \left[1 + \left(\frac{rx}{L-x} \right) \right]}{x} = \frac{r M_p \left(\frac{L+x}{L-x} \right)}{x} = \frac{r M_p (L+x)}{x(L-x)}$$

$$\rightarrow Q = r M_p \times \frac{(L+x)}{x(L-x)}$$

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \rightarrow r M_p \times \left(\frac{(x(L-x)) - (L-rx)(L+x)}{(xL-x^2)^2} \right) = 0 \rightarrow x = (-1 \pm \sqrt{r}) L \quad \text{باید } x \text{ مثبت باشد}$$

$$Q = r M_p \times \frac{(L + (-1 + \sqrt{r}) L)}{((-1 + \sqrt{r}) L) (L - (-1 + \sqrt{r}) L)} \rightarrow Q = (r + r\sqrt{r}) \frac{M_p}{L}$$

$$q = (r + r\sqrt{r}) \frac{M_p}{L^2}$$



$$\text{کار داخلی} = M_p \times 2\theta$$

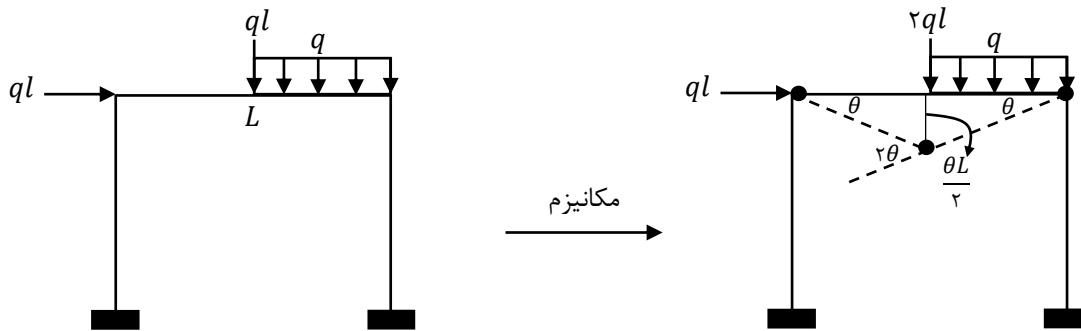
مساحت زیر منحنی تغییرشکل $\times$ نیروی گسترده = کار خارجی

$$W_e = \int_0^{\frac{L}{r}} \theta x \times \frac{qx}{L} dx = \frac{qx^2\theta}{2L} \Big|_0^{\frac{L}{r}} = \frac{qL^2}{2r} \theta$$

$$W_e = \int_{\frac{L}{r}}^L \theta (L-x) \times \frac{qx}{L} dx = \int_{\frac{L}{r}}^L \left(qx\theta - \frac{qx^2}{L}\theta \right) dx = \left(\frac{qx^2}{2}\theta - \frac{1}{3} \frac{qx^3}{L}\theta \right) \Big|_{\frac{L}{r}}^L = \left(\frac{qL^2}{2}\theta - \frac{qL^2}{3}\theta \right) - \left(\frac{qL^2}{6}\theta - \frac{qL^2}{24}\theta \right) = \frac{qL^2}{12}\theta$$

$$M_p \times 2\theta = \frac{qL^2}{24}\theta + \frac{qL^2}{12}\theta \rightarrow q = 16 \frac{M_p}{L^2}$$

ادامه حل مثال ۱:



کار خارجی = کار داخلی

$$M_p \theta + M_p \theta + M_p \times 2\theta = \left(2ql \times \frac{\theta L}{2} \right) + \left(\frac{ql}{2} \times \frac{\theta L}{2} \times \frac{1}{2} \right)$$

$$q = \frac{4M_p \theta}{\frac{1}{2} L^2 \theta} \rightarrow q = \frac{8M_p}{L^2}$$

فصل سوم

«تحلیل فزاینده»

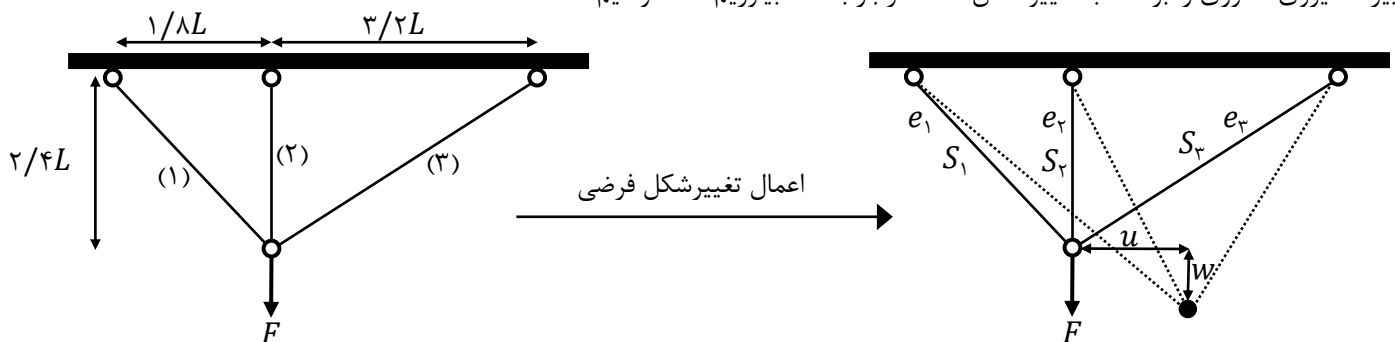
مقدمه

در فصل قبل در مورد تعیین بار خرابی یک سیستم سازه‌ای بحث کردیم. به طور خلاصه نیرویی یا مجموعه‌ای از نیروهای خارجی که باعث می‌شد سازه به طور کامل پلاستیک شده و در آستانه‌ی فروپاشی قرار بگیرد را محاسبه کردیم. بطوریکه ابتدا تمامی مکانیزم‌های محتمل سازه را تحلیل می‌کردیم و نیروی خرابی را برای هر کدام محاسبه می‌کردیم و کمترین نیرو را بعنوان نیروی بحرانی یا خرابی در نظر می‌گرفتیم.

در این بخش همانطور که از عنوان فصل پیداست، مرحله به مرحله با افزایش بار وارد به سازه، تسلیم شدن تک تک اعضا تا خرابی و مکانیزم شدن سیستم را بررسی خواهیم کرد، به عبارت دیگر روند خرابی را تحلیل و بررسی خواهیم کرد. در نرم افزارهای مهندسی عمران با این نوع تحلیل تحت عنوان تحلیل پوش آور آشنا شده بودیم.

برای آغاز بحث به بررسی یک مثال می‌پردازیم:

سازه زیر از سه میله با مساحت مقطع (A) و مدول الاستیسیته (E) یکسان تشکیل شده است. اگر نیرو تسلیم میله‌ها برابر (S) باشد. می‌خواهیم منحنی تغییرات نیروی محوری را بر حسب تغییر مکان نقطه اثر بار بدست بیاوریم. لذا خواهیم داشت:



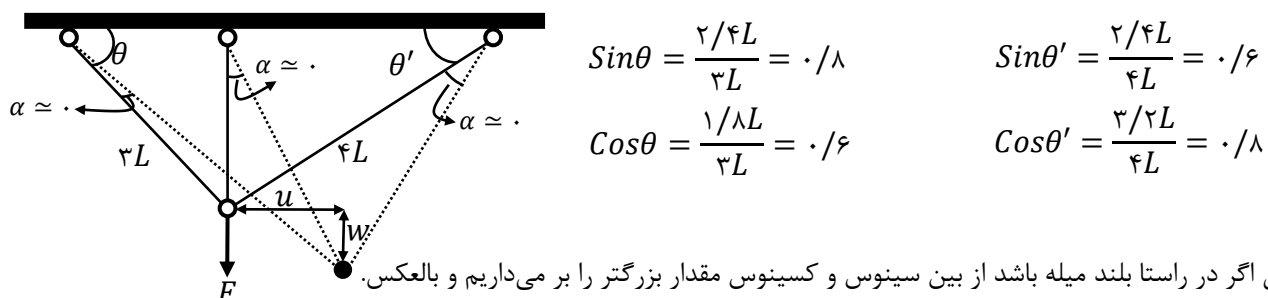
ابتدا بطور فرضی، خودمان یک تغییر شکل اعمال می‌کنیم (شکل نقطه‌چین)

فضاهای مورد بررسی: $\left. \begin{array}{l} \text{نیروهای خارجی: } F \\ \text{نیروهای داخلی: } S_1 \text{ و } S_2 \text{ و } S_3 \\ \text{تغییر شکل داخلی: } e_1 \text{ و } e_2 \text{ و } e_3 \\ \text{تغییر شکل خارجی: } u \text{ و } w \end{array} \right\}$

چگونگی ارتباط چهار فضای فوق بشرح زیر است:

نیروهای خارجی $\xrightarrow{\text{معادلات تعادل}}$ نیروهای داخلی $\xrightarrow{\text{معادلات بنیادی (قانون هوک)}} \xrightarrow{\text{معادلات سینماتیک}}$ تغییر شکل داخلی $\xrightarrow{\text{معادلات تعادل}}$ تغییر شکل خارجی

همانطور که در شکل زیر ملاحظه می‌کنید، بدلیل اینکه زاویه تغییر شکل میله بسیار کوچک است ($\alpha \approx 0$) (بر هم منطبق هستند) لذا برای محاسبه مولفه‌های کرنش، از زاویه میله‌ها در حالت بدون اعمال تغییر شکل استفاده می‌کنیم.



لذا:

$$\sin \theta = \frac{2/4L}{3L} = 0.6$$

$$\cos \theta = \frac{1/4L}{3L} = 0.8$$

$$\sin \theta' = \frac{2/4L}{4L} = 0.5$$

$$\cos \theta' = \frac{3/4L}{4L} = 0.75$$

راستای جابجایی اگر در راستای بلند میله باشد از بین سینوس و کسینوس مقدار بزرگتر را بر می‌داریم و بالعکس.

$$e_1 = \underbrace{0.6}_{\text{راستای بلند}} u + \underbrace{0.8}_{\text{راستای کوتاه}} w$$

$$e_2 = w$$

$$e_3 = \underbrace{0.5}_{\text{راستای بلند}} u + \underbrace{0.75}_{\text{راستای کوتاه}} w$$

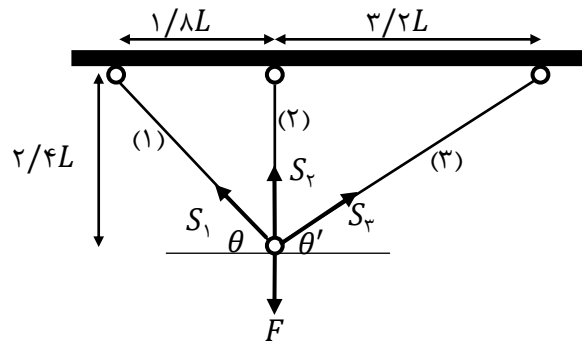
نیرو در هر میله طبق قانون هوک برابر است با:

$$S_1 = \frac{EA}{3L} e_1 = \frac{EA}{3L} (\cdot/6u + \cdot/8w)$$

$$S_2 = \frac{EA}{2/4L} e_2 = \frac{EA}{2/4L} w$$

$$S_3 = \frac{EA}{4L} e_3 = \frac{EA}{4L} (-\cdot/8u + \cdot/6w)$$

برای محاسبه مقادیر جابجایی، از معادله تعادل خواهیم داشت:



$$\sum F_x = \cdot \rightarrow \cdot/6S_1 = \cdot/8S_3 \xrightarrow{\text{جابجایی مقادیر } S} \cdot/28u + \cdot/4w = \cdot$$

$$\sum F_y = \cdot \rightarrow \cdot/8S_1 + S_2 + \cdot/6S_3 = F \xrightarrow{\text{جابجایی مقادیر } S} \cdot/4u + \cdot/72w = \frac{FL}{EA}$$

لذا با حل دو معادله دو مجهولی اخیر:

$$u = -\cdot/2 \frac{FL}{EA}$$

$$w = 1/4 \frac{FL}{EA}$$

با توجه به منفی بودن علامت u ، لذا باید جهت جابجایی افقی را قرینه کنیم.

لذا نیروی هر یک از میله ها برابر می شود با:

$$S_1 = \frac{EA}{3L} e_1 = \frac{EA}{3L} \left[\cdot/6 \times \left(-\cdot/2 \frac{FL}{EA}\right) + \cdot/8 \times \left(1/4 \frac{FL}{EA}\right) \right] \rightarrow \boxed{S_1 = \cdot/333F}$$

$$S_2 = \frac{EA}{2/4L} e_2 = \frac{EA}{2/4L} \left(1/4 \frac{FL}{EA}\right) \rightarrow \boxed{S_2 = \cdot/583F}$$

$$S_3 = \frac{EA}{4L} e_3 = \frac{EA}{4L} \left[-\cdot/8 \times \left(-\cdot/2 \frac{FL}{EA}\right) + \cdot/6 \times \left(1/4 \frac{FL}{EA}\right) \right] \rightarrow \boxed{S_3 = \cdot/25F}$$

روش بالا یک حل الاستیک بود و تا زمانی معتبر است که میله ها تسلیم نشده باشند. از روابط فوق می توان نتیجه گرفت که ابتدا میله (۲) به تسلیم می رسد.

فرض کنیم نیرو خرابی (تسلیم) میله ها برابر S باشد، در اینصورت، با توجه به نیروی میله ها، ابتدا میله ۲ به تسلیم می رسد.

$$\cdot/583F = S. \rightarrow \boxed{F = F^{(1)} = 1/714S.}$$

یعنی اگر نیروی خارجی F را به $1/714S$ برسانیم، میله (۲) تسلیم خواهد شد و نیروی میله های ۱ و ۳ بصورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$F^{(1)} = 1/714S. \rightarrow \begin{cases} S_1^{(1)} = \cdot/333F^{(1)} = \cdot/333(1/714S.) \rightarrow \boxed{S_1^{(1)} = \cdot/571S.} \\ S_2^{(1)} = \cdot/583F \rightarrow \boxed{S_2^{(1)} = S.} \\ S_3^{(1)} = \cdot/25F^{(1)} = \cdot/25(1/714S.) \rightarrow \boxed{S_3^{(1)} = \cdot/429S.} \end{cases}$$

مولفه های جابجایی برابر خواهد شد با:

$$F^{(1)} = 1/714S. \rightarrow \begin{cases} u^{(1)} = -0.7 \frac{F^{(1)}L}{EA} = -0.7 \frac{(1/714S.)L}{EA} \rightarrow \boxed{u^{(1)} = -0.733 \frac{S.L}{EA}} \\ w^{(1)} = 1/4 \frac{F^{(1)}L}{EA} = 1/4 \frac{(1/714S.)L}{EA} \rightarrow \boxed{w^{(1)} = 2/4 \frac{S.L}{EA}} \end{cases}$$

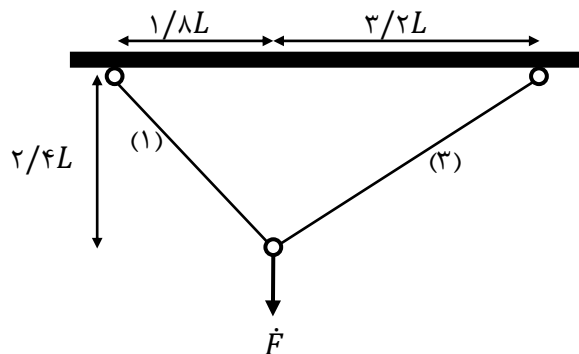
پس از تسلیم شدن میله ۲ مرحله جدید شروع می شود و عملاً بازای افزایش بار، تنش اضافی در میله ۲ نخواهیم داشت و نیروی میله ۲، S . باقی می ماند و فقط تغییر شکل آن افزایش می یابد.

حال نیروی F را باندازه $(\dot{F})$ افزایش می دهیم تا میله بعدی تسلیم شود. لذا مرحله قبلی را تکرار میکنیم، با این تفاوت که نیروی میله (۲) حذف می شود.

$$\dot{e}_1 = 0.6\dot{u} + 0.8\dot{w}$$

$$\dot{e}_2 = \dot{w}$$

$$\dot{e}_3 = -0.8\dot{u} + 0.6\dot{w}$$

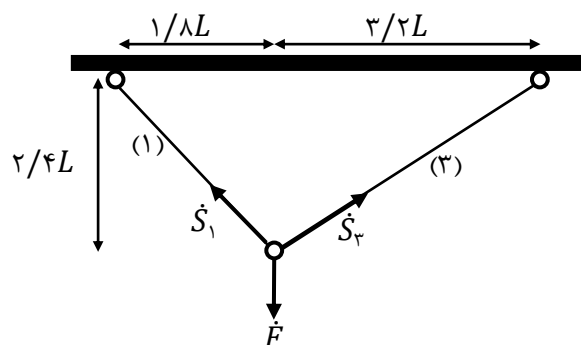


$$\dot{S}_1 = \frac{EA}{3L} \dot{e}_1 = \frac{EA}{3L} (0.6\dot{u} + 0.8\dot{w})$$

$$\dot{S}_2 = 0$$

$$\dot{S}_3 = \frac{EA}{4L} \dot{e}_3 = \frac{EA}{4L} (-0.8\dot{u} + 0.6\dot{w})$$

از معادله تعادل:



$$\sum F_x = 0 \rightarrow 0.6\dot{S}_1 = 0.8\dot{S}_3 \xrightarrow{\text{جایگذاری مقادیر } \dot{S}} 0.28\dot{u} + 0.4\dot{w} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 0.8\dot{S}_1 + 0.6\dot{S}_3 = \dot{F} \xrightarrow{\text{جایگذاری مقادیر } \dot{S}} 0.4\dot{u} + 0.33\dot{w} = \frac{\dot{F}L}{EA}$$

لذا با حل دو معادله دو مجهولی اخیر:

$$\boxed{\dot{u} = -0.48 \frac{\dot{F}L}{EA}}$$

$$\boxed{\dot{w} = 3/36 \frac{\dot{F}L}{EA}}$$

$$\dot{S}_1 = \frac{EA}{3L} (\cdot/6 \dot{u} + \cdot/8 \dot{w}) = \frac{EA}{3L} \left[\cdot/6 \left(-\cdot/48 \frac{\dot{F}L}{EA} \right) + \cdot/8 \left(3/36 \frac{\dot{F}L}{EA} \right) \right] \rightarrow \boxed{\dot{S}_1 = \cdot/8 \dot{F}}$$

$$\boxed{\dot{S}_r = \cdot}$$

$$\dot{S}_r = \frac{EA}{4L} (-\cdot/8 \dot{u} + \cdot/6 \dot{w}) = \frac{EA}{4L} \left[-\cdot/8 \left(-\cdot/48 \frac{\dot{F}L}{EA} \right) + \cdot/6 \left(3/36 \frac{\dot{F}L}{EA} \right) \right] \rightarrow \boxed{\dot{S}_r = \cdot/6 \dot{F}}$$

لذا نیروی هر یک از میله ها در مرحله دوم برابر خواهد شد با:

$$S_1^{(2)} = S_1^{(1)} + \dot{S}_1 = \cdot/571 S. + \cdot/8 \dot{F}$$

$$S_r^{(2)} = S_r^{(1)} = S.$$

$$S_r^{(2)} = S_r^{(1)} + \dot{S}_r = \cdot/429 S. + \cdot/6 \dot{F}$$

حال می‌خواهیم بدانیم از بین میله های ۱ و ۳ کدام یک زودتر تسلیم می‌شود، لذا هر کدام را مساوی $S.$ قرار می‌دهیم:

$$S. = \cdot/571 S. + \cdot/8 \dot{F} \rightarrow \dot{F} = \frac{S. - \cdot/571 S.}{\cdot/8} \rightarrow \dot{F}_{\text{میله ۱}} = \frac{S. - \cdot/571 S.}{\cdot/8} = \cdot/536 S.$$

$$S. = \cdot/429 S. + \cdot/6 \dot{F} \rightarrow \dot{F} = \frac{S. - \cdot/429 S.}{\cdot/6} \rightarrow \dot{F}_{\text{میله ۳}} = \frac{S. - \cdot/429 S.}{\cdot/6} = \cdot/952 S.$$

چون $\dot{F}_{\text{میله ۳}} < \dot{F}_{\text{میله ۱}}$ لذا میله ۱ زودتر از میله ۳ تسلیم می‌شود:

$$\boxed{\dot{F} = \cdot/536 S.}$$

$$F^{(2)} = F^{(1)} + \dot{F} = 1/714 S. + \cdot/536 S. \rightarrow \boxed{F^{(2)} = 2/25 S.}$$

$$S_1^{(2)} = S_1^{(1)} + \dot{S}_1 = \cdot/571 S. + \cdot/8 \dot{F} = \cdot/571 S. + (\cdot/8 \times \cdot/536) S. \rightarrow \boxed{S_1^{(2)} = S.}$$

$$S_r^{(2)} = S_r^{(1)} = S. \rightarrow \boxed{S_r^{(2)} = S.}$$

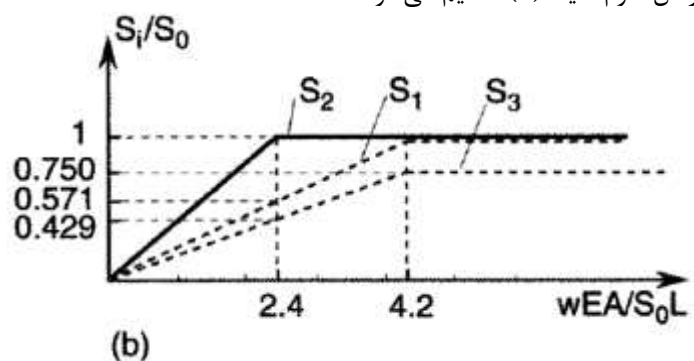
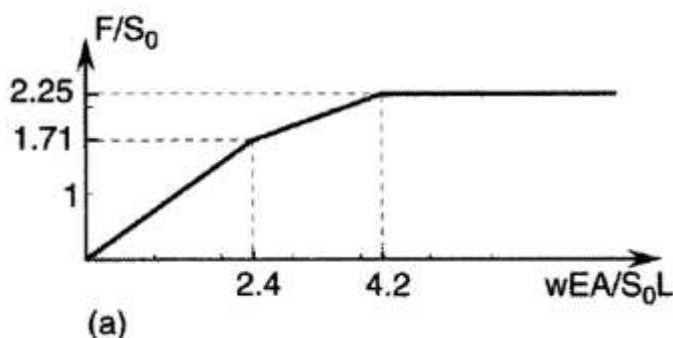
$$S_r^{(2)} = S_r^{(1)} + \dot{S}_r = \cdot/429 S. + \cdot/6 \dot{F} = \cdot/429 S. + (\cdot/6 \times \cdot/536) S. \rightarrow \boxed{S_r^{(2)} = \cdot/75 S.}$$

تغییر شکل‌های مرحله دوم به صورت زیر است:

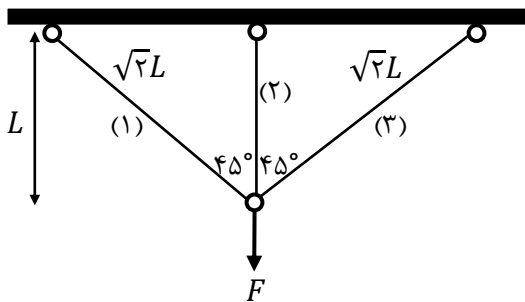
$$u^{(2)} = u^{(1)} + \dot{u} = -\cdot/343 \frac{S.L}{EA} - \cdot/48 \frac{\dot{F}L}{EA} \rightarrow \boxed{u^{(2)} = -\cdot/6 \frac{S.L}{EA}}$$

$$w^{(2)} = w^{(1)} + \dot{w} = 2/4 \frac{S.L}{EA} + 3/36 \frac{\dot{F}L}{EA} \rightarrow \boxed{w^{(2)} = 4/2 \frac{S.L}{EA}}$$

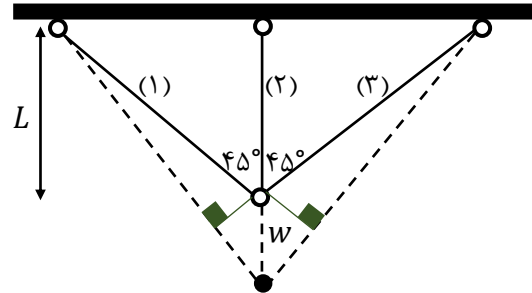
در مرحله سوم، میله (۳) تسلیم می‌شود.



مثال ۱: روند خرابی خرابی متقارن زیر را تحلیل و بررسی کنید. (تحلیل فزاینده)



$$e_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} w$$



$$e_2 = w$$

$$e_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} w$$

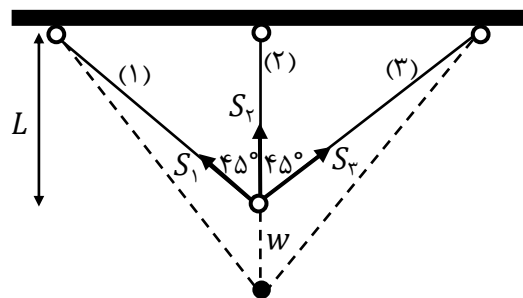
نیرو در هر میله طبق قانون هوک برابر است با:

$$S_1 = \frac{EA}{\sqrt{2}L} e_1 = \frac{EA}{\sqrt{2}L} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} w \right) = \frac{EA}{2L} w$$

$$S_2 = \frac{EA}{L} e_2 = \frac{EA}{L} w$$

$$S_3 = \frac{EA}{\sqrt{2}L} e_3 = \frac{EA}{\sqrt{2}L} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} w \right) = \frac{EA}{2L} w$$

برای محاسبه مقادیر جابجایی، از معادله تعادل خواهیم داشت:



$$\sum F_x = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} S_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} S_3 \xrightarrow{\text{جابجایی مقادیر } S} S_1 = S_3$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} S_1 + S_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} S_3 = F \xrightarrow{\text{جابجایی مقادیر } S} \frac{\sqrt{2}EA}{2L} w + \frac{EA}{L} w + \frac{\sqrt{2}EA}{2L} w = F$$

لذا:

$$w = (\sqrt{2} - 1) \frac{FL}{EA}$$

با توجه به مثبت بودن علامت w ، لذا جهت جابجایی را درست انتخاب کردیم.

لذا نیروی هر یک از میله ها برابر می شود با:

$$S_1 = S_3 = \frac{EA}{2L} w = \frac{EA}{2L} \left((\sqrt{2} - 1) \frac{FL}{EA} \right) \rightarrow S_1 = S_3 = \frac{(\sqrt{2} - 1)}{2} F$$

$$S_2 = \frac{EA}{L} w = \frac{EA}{L} \left((\sqrt{2} - 1) \frac{FL}{EA} \right) \rightarrow S_2 = (\sqrt{2} - 1) F$$

چون نیروی میله ۲ از سایر میله ها بیشتر است، لذا ابتدا میله ۲ تسلیم می شود.

فرض کنیم نیرو خرابی (تسلیم) میله ها برابر S باشد، در اینصورت:

$$(2 - \sqrt{2})F = S. \rightarrow F = F^{(1)} = \frac{1}{(2 - \sqrt{2})} S.$$

یعنی اگر نیروی خارجی F را به $\frac{1}{(2 - \sqrt{2})} S$ برسانیم، میله (۲) تسلیم خواهد شد و نیروی میله های ۱ و ۳ بصورت زیر محاسبه خواهد شد:

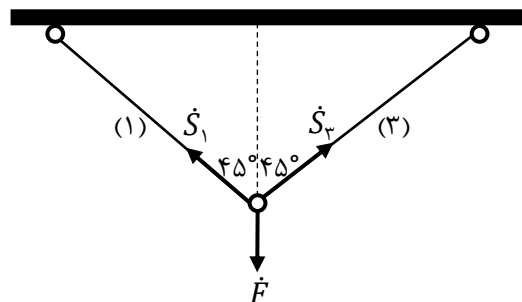
$$F^{(1)} = \frac{1}{(2 - \sqrt{2})} S. \rightarrow \begin{cases} S_1^{(1)} = \frac{(2 - \sqrt{2})}{2} F = \frac{(2 - \sqrt{2})}{2} \times \frac{1}{(2 - \sqrt{2})} S. = \frac{S}{2} \\ S_2^{(1)} = (2 - \sqrt{2}) F = (2 - \sqrt{2}) \times \frac{1}{(2 - \sqrt{2})} S. = S. \\ S_3^{(1)} = \frac{(2 - \sqrt{2})}{2} F = \frac{(2 - \sqrt{2})}{2} \times \frac{1}{(2 - \sqrt{2})} S. = \frac{S}{2} \end{cases}$$

مولفه جابجایی برابر خواهد شد با:

$$w^{(1)} = (2 - \sqrt{2}) \frac{FL}{EA} = (2 - \sqrt{2}) \frac{1}{(2 - \sqrt{2})} \frac{S.L}{EA} \rightarrow w^{(1)} = \frac{S.L}{EA}$$

پس از تسلیم شدن میله ی ۲ مرحله جدید شروع می شود و عملاً بازای افزایش بار، تنش اضافی در میله ۲ نخواهیم داشت و نیروی میله ۲، S باقی می ماند و فقط تغییر شکل آن افزایش می یابد.

حال نیروی F باندازه ی $\dot{F}$ را افزایش می دهیم تا میله بعدی تسلیم شود. لذا مرحله قبلی را تکرار می کنیم، با این تفاوت که نیروی میله (۲) حذف می شود.



$$\dot{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{w}$$

$$\dot{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{w}$$

$$\dot{e}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{w}$$

$$\dot{S}_1 = \frac{EA}{\sqrt{2}L} \dot{e}_1 = \frac{EA}{\sqrt{2}L} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \dot{w} \right) = \frac{EA}{2L} \dot{w}$$

$$\dot{S}_2 = \cdot$$

$$\dot{S}_3 = \frac{EA}{\sqrt{2}L} \dot{e}_3 = \frac{EA}{\sqrt{2}L} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \dot{w} \right) = \frac{EA}{2L} \dot{w}$$

از معادله تعادل:

$$\sum F_x = \cdot \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{S}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{S}_3 \rightarrow \dot{S}_1 = \dot{S}_3$$

$$\sum F_y = \cdot \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{S}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{S}_3 = \dot{F} \xrightarrow{\text{جایگذاری مقادیر } \dot{S}} 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{EA}{2L} \dot{w} \right) = \dot{F}$$

لذا:

$$\dot{w} = \sqrt{2} \frac{\dot{F}L}{EA}$$

لذا نیروی هر یک از میله ها در مرحله دوم برابر خواهد شد با:

$$S_1^{(2)} = S_1^{(1)} + \dot{S}_1 = \frac{S.}{2} + \frac{EA}{2L} \dot{w} = \frac{S.}{2} + \frac{EA}{2L} \left(\sqrt{2} \frac{\dot{F}L}{EA} \right)$$

$$S_2^{(2)} = S_2^{(1)} + \overset{\text{صفر}}{\dot{S}_2} = S.$$

$$S_3^{(2)} = S_3^{(1)} + \dot{S}_3 = \frac{S.}{2} + \frac{EA}{2L} \dot{w} = \frac{S.}{2} + \frac{EA}{2L} \left(\sqrt{2} \frac{\dot{F}L}{EA} \right)$$

چون نیروی دو میله ۱ و ۳ مساوی هم است، لذا با هم تسلیم می شوند.

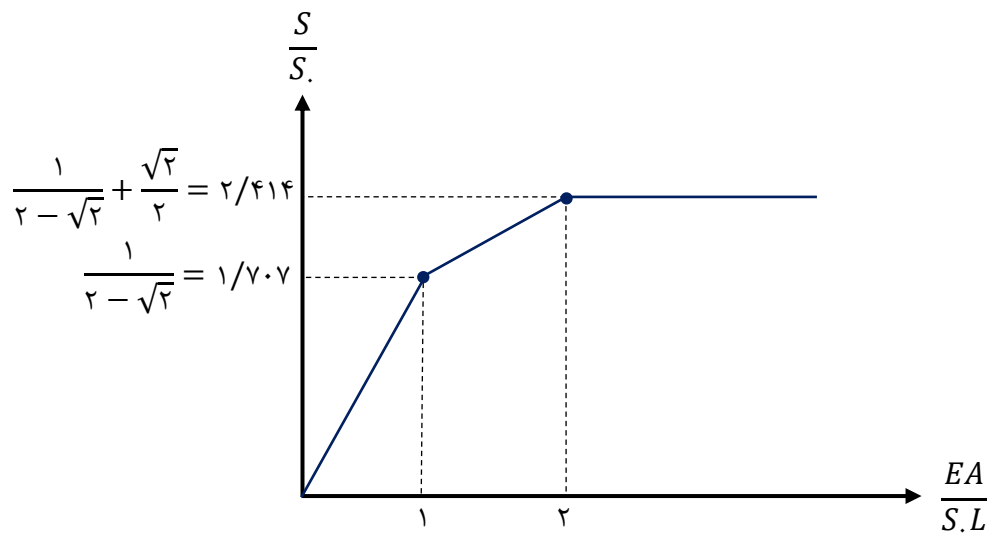
$$\frac{S.}{2} + \frac{EA}{2L} \left(\sqrt{2} \frac{\dot{F}L}{EA} \right) = S. \rightarrow \dot{F} = \frac{\sqrt{2}}{2} S.$$

یعنی اگر نیروی خارجی F را به $S. \left(\frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ برسانیم، میله ۱ و ۳ تسلیم خواهد شد.

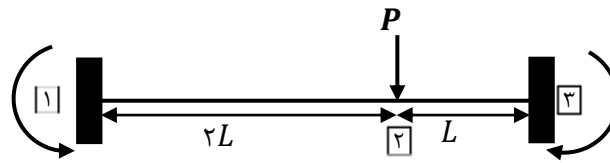
مولفه جابجایی برابر خواهد شد با:

$$\dot{w} = \sqrt{2} \frac{\dot{F}L}{EA} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{S.L}{EA} \rightarrow \dot{w} = \frac{S.L}{EA}$$

$$w^{(2)} = w^{(1)} + \dot{w} = \frac{S.L}{EA} + \frac{S.L}{EA} = 2 \frac{S.L}{EA}$$



مثال ۲: روند خرابی تیر زیر را تحلیل و بررسی کنید. (تحلیل)

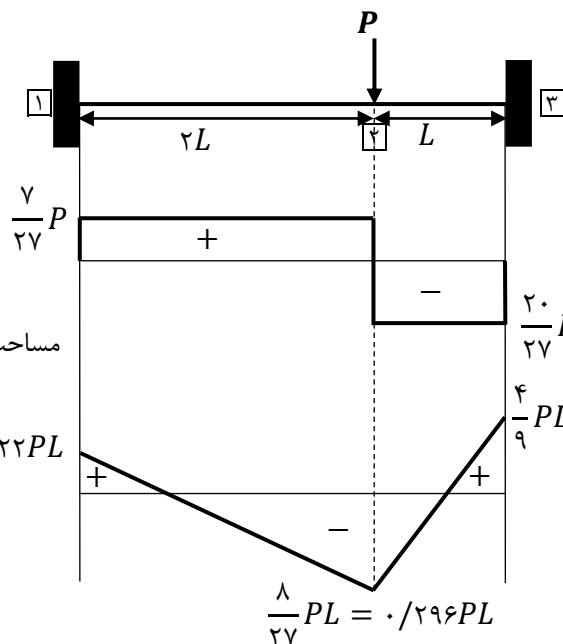


$$M_1 = \frac{P \times 2L \times L^2}{(3L)^2} = \frac{2}{9} PL$$

$$M_3 = \frac{P \times L \times (2L)^2}{(3L)^2} = \frac{4}{9} PL$$

رسم دیاگرام برش و خمش:

$$\sum M_3 = 0 \rightarrow R_A \times 3L - \frac{2}{9} PL - PL + \frac{4}{9} PL = 0 \rightarrow R_A = \frac{5}{27} P \quad R_B = \frac{20}{27} P$$



مساحت زیر منحنی برش، برابر خمش است.

$$\frac{2}{9} PL = \frac{1}{2} \times \frac{5}{27} P \times 2L$$

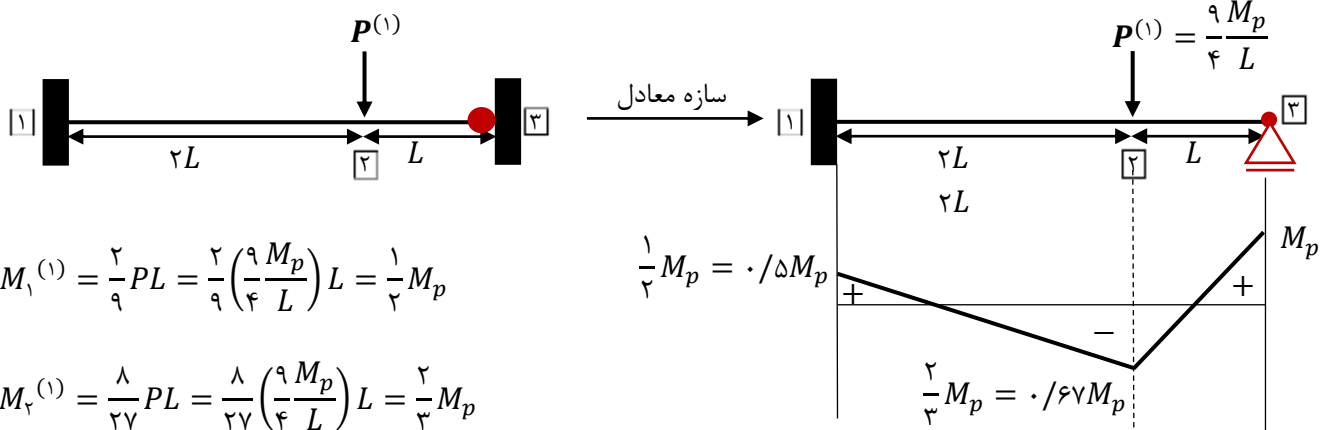
$$\frac{4}{9} PL = \frac{1}{2} \times \frac{20}{27} P \times L$$

چون اندازه لنگر در تکیه گاه ۳، بیشتر از سایر نقاط است، لذا اولین لنگر پلاستیک در تکیه گاه ۳ تشکیل می شود.

بار خرابی:

$$M_p = \frac{4}{9} PL \rightarrow P^{(1)} = \frac{9}{4} \frac{M_p}{L}$$

اگر بار P را تا $\frac{9}{4} \frac{M_p}{L}$ افزایش دهیم در نقطه ی ۳ لنگر پلاستیک تشکیل می شود و تیر به شکل زیر در می آید.



$$M_1^{(1)} = \frac{2}{9} PL = \frac{2}{9} \left(\frac{9}{4} \frac{M_p}{L} \right) L = \frac{1}{2} M_p$$

$$M_3^{(1)} = \frac{4}{9} PL = \frac{4}{9} \left(\frac{9}{4} \frac{M_p}{L} \right) L = M_p$$

اگر پس از تشکیل اولین مفصل پلاستیک، بار P را باندازه $\dot{P}$ افزایش دهیم، خواهیم داشت:

$$\dot{M}_1 = \frac{\dot{P} \times 2L \times L}{(2L)^2} + \frac{1}{2} \frac{\dot{P} \times (2L)^2 \times L}{(2L)^2} = \frac{4}{9} \dot{P}L = 0.444 \dot{P}L$$

$$\sum M_r = 0 \rightarrow \dot{R}_1 \times 2L - \frac{4}{9} \dot{P}L - \dot{P}L = 0 \rightarrow \dot{R}_1 = \frac{13}{27} \dot{P} \quad \dot{R}_2 = \frac{14}{27} \dot{P}$$

$$\dot{M}_2 = \frac{14}{27} \dot{P} \times L = 0.5185 \dot{P}L$$

حالا می‌خواهیم بدانیم بین نقاط ۱ و ۲ کدام یک زودتر تسلیم می‌شود:

نقطه ۱ دارای لنگر اولیه $M_1^{(1)} = 0.5M_p$ بود که باندازه $\dot{M}_1 = \frac{4}{9} \dot{P}L$ به آن اضافه می‌شود و در کل دارای لنگر زیر خواهد بود:

$$M_1^{(2)} = M_1^{(1)} + \dot{M}_1 = 0.5M_p + 0.444 \dot{P}L$$

نقطه ۲ دارای لنگر اولیه $M_2^{(1)} = \frac{2}{3} M_p$ بود که باندازه $\dot{M}_2 = \frac{14}{27} \dot{P}L$ به آن اضافه می‌شود و در کل دارای لنگر زیر خواهد بود:

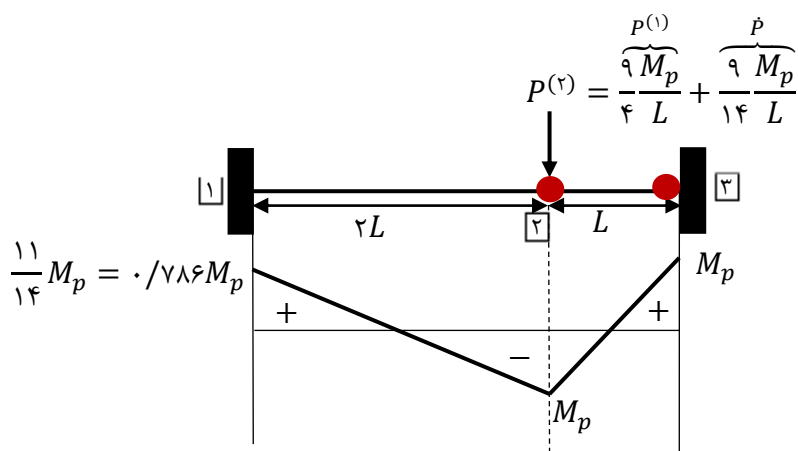
$$M_2^{(2)} = M_2^{(1)} + \dot{M}_2 = 0.67M_p + 0.5185 \dot{P}L$$

چون اندازه لنگر در نقطه ۲، بیشتر از سایر نقاط است، لذا دومین لنگر پلاستیک در نقطه ۲ (زیر بار متمرکز) تشکیل می‌شود. لذا لنگر نقطه ۲ را مساوی M_p قرار می‌دهیم:

$$M_2^{(2)} = M_2^{(1)} + \dot{M}_2 = \frac{2}{3} M_p + \frac{14}{27} \dot{P}L = M_p \rightarrow \dot{P} = \frac{9}{14} \frac{M_p}{L}$$

لذا لنگر نقاط ۲ و ۳ برابر با M_p و لنگر نقطه ۱ برابر خواهد شد با:

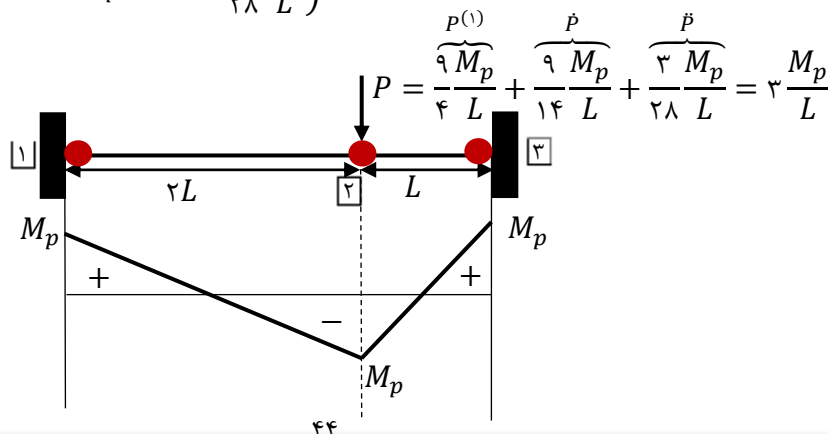
$$M_1^{(2)} = M_1^{(1)} + \dot{M}_1 = 0.5M_p + \frac{4}{9} \dot{P}L = 0.5M_p + \frac{4}{9} \left(\frac{9}{14} \frac{M_p}{L} \right) L = \frac{11}{14} M_p = 0.786M_p$$



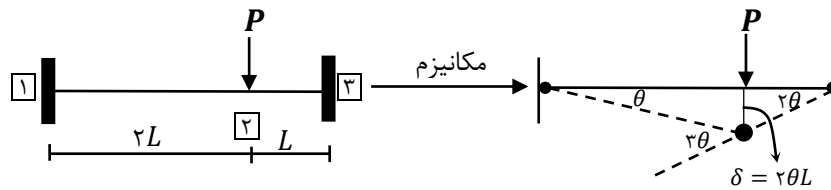
اگر پس از تشکیل مفصل پلاستیک دوم دوباره $P^{(2)}$ را باندازه $\ddot{P}$ افزایش دهیم مفصل سوم در نقطه ۱ تشکیل خواهد شد:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{M}_1 &= \ddot{P} \times 2L \\ M_1^{(3)} &= M_p \rightarrow \frac{11}{14} M_p + \ddot{P} \times 2L = M_p \rightarrow \ddot{P} = \frac{3}{28} \frac{M_p}{L} \end{aligned} \right\} \rightarrow \ddot{M}_1 = \frac{3}{14} M_p$$

$$P = \frac{9}{4} \frac{M_p}{L} + \frac{9}{14} \frac{M_p}{L} + \frac{3}{28} \frac{M_p}{L} = 3 \frac{M_p}{L}$$



مقایسه با نتیجه روش مکانیزم:



کار خارجی = کار داخلی

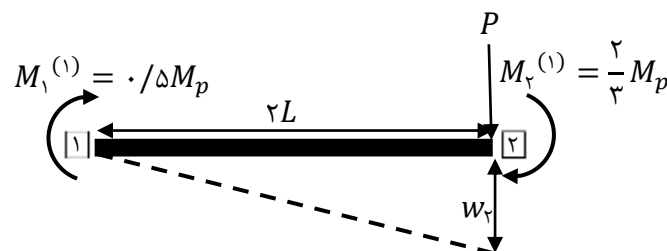
$$M_p \theta + M_p \times 2\theta + M_p \times 3\theta = P \times 2L\theta$$

$$P = \frac{6M_p \theta}{2L\theta} \rightarrow P = \frac{3M_p}{L}$$

همانطور که در مقدمه فصل اشاره شد، در روش مکانیزم، فقط بار خرابی را می‌توانیم محاسبه کنیم.

برای محاسبه جابجایی‌ها در هر مرحله می‌توان از روش شیب افت استفاده کرد.

محاسبه جابجایی مرحله اول:



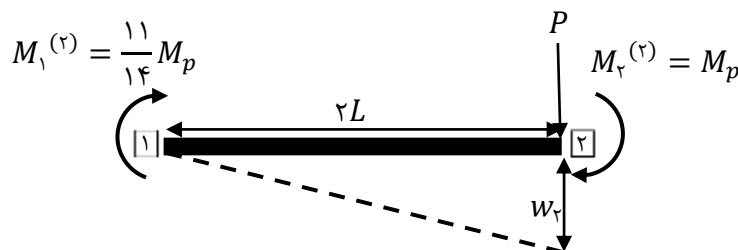
$$M_1^{(1)} = \frac{\overbrace{EI}^{\text{صفر}}}{2L} \theta_A + \frac{EI}{2L} \theta_B - \frac{6EI\delta}{(2L)^2} \overbrace{\pm FEM}^{\text{صفر}} \rightarrow \cdot / \Delta M_p = \frac{EI}{L} \theta_B - \frac{3EI w_1}{2L^2}$$

$$M_2^{(1)} = \frac{EI}{2L} \theta_B + \frac{\overbrace{EI}^{\text{صفر}}}{2L} \theta_A - \frac{6EI\delta}{(2L)^2} \overbrace{\pm FEM}^{\text{صفر}} \rightarrow \frac{2}{3} M_p = \frac{EI}{L} \theta_B - \frac{3EI w_1}{2L^2}$$

با حل دو معادله‌ی دو مجهولی فوق خواهیم داشت:

$$w_1^{(1)} = -\frac{2}{9} \frac{M_p L^2}{EI} = -0.222 \frac{M_p L^2}{EI}$$

محاسبه جابجایی مرحله دوم:



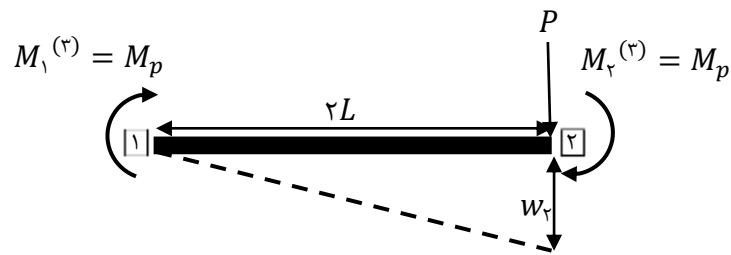
$$M_1^{(2)} = \frac{\overbrace{EI}^{\text{صفر}}}{2L} \theta_A + \frac{EI}{2L} \theta_B - \frac{6EI\delta}{(2L)^2} \overbrace{\pm FEM}^{\text{صفر}} \rightarrow \frac{11}{14} M_p = \frac{EI}{L} \theta_B - \frac{3EI w_2}{2L^2}$$

$$M_2^{(2)} = \frac{EI}{2L} \theta_B + \frac{\overbrace{EI}^{\text{صفر}}}{2L} \theta_A - \frac{6EI\delta}{(2L)^2} \overbrace{\pm FEM}^{\text{صفر}} \rightarrow M_p = \frac{EI}{L} \theta_B - \frac{3EI w_2}{2L^2}$$

با حل دو معادله‌ی دو مجهولی فوق خواهیم داشت:

$$w_2^{(2)} = -\frac{8}{21} \frac{M_p L^2}{EI} = -0.381 \frac{M_p L^2}{EI}$$

محاسبه جابجایی مرحله سوم:

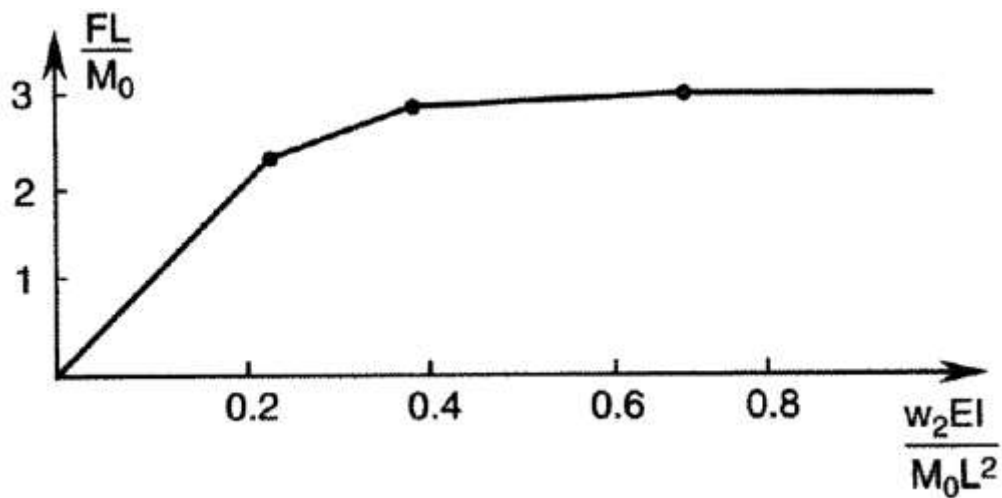


$$M_1^{(2)} = \frac{\overbrace{\frac{EI}{L}}^{\text{صفر}} \theta_A + \frac{EI}{L} \theta_B - \frac{EI \delta}{(L/2)^2} \overbrace{\pm FEM}^{\text{صفر}} \rightarrow M_p = \frac{EI}{L} \theta_B - \frac{EI w_2}{L^2}$$

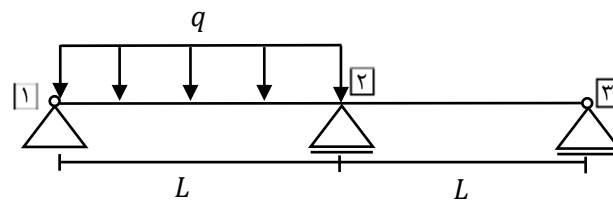
$$M_2^{(2)} = \frac{EI}{L} \theta_B + \frac{\overbrace{\frac{EI}{L}}^{\text{صفر}} \theta_A - \frac{EI \delta}{(L/2)^2} \overbrace{\pm FEM}^{\text{صفر}} \rightarrow M_p = \frac{EI}{L} \theta_B - \frac{EI w_2}{L^2}$$

با حل دو معادله‌ی دو مجهولی فوق خواهیم داشت:

$$w_2^{(2)} = -\frac{M_p L^2}{EI} = -0.667 \frac{M_p L^2}{EI}$$



مثال ۳: روند خرابی تیر زیر را تحلیل و بررسی کنید. (تحلیل فزاینده)



ابتدا سازه را تحلیل می‌کنیم و دیاگرام برش و خمش را رسم می‌کنیم. چون سازه نامعین است از روش شیب-افت کمک می‌گیریم.

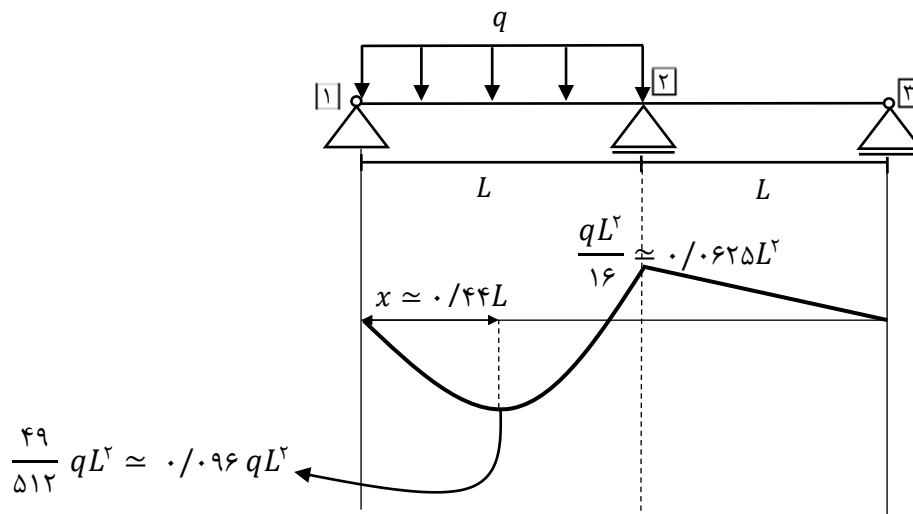
$$M_{r1} = 3 \frac{EI}{L} \theta_r - 3 \frac{EI}{L} \delta + FEM_{r1} + \frac{FEM_{1r}}{2} = 3 \frac{EI}{L} \theta_r + \frac{qL^3}{12} + \frac{qL^3}{24} = 3 \frac{EI}{L} \theta_r + \frac{qL^3}{8}$$

$$M_{r2} = 3 \frac{EI}{L} \theta_r - 3 \frac{EI}{L} \delta + FEM_{r2} + \frac{FEM_{2r}}{2} = 3 \frac{EI}{L} \theta_r$$

$$\sum M_r = 0 \rightarrow 3 \frac{EI}{L} \theta_r + \frac{qL^3}{8} + 3 \frac{EI}{L} \theta_r = 0 \rightarrow 3 \frac{EI}{L} \theta_r = -\frac{qL^3}{16}$$

$$M_{r1} = 3 \frac{EI}{L} \theta_r + \frac{qL^3}{8} \rightarrow M_{r1} = \left(-\frac{qL^3}{16} \right) + \frac{qL^3}{8} = \frac{qL^3}{16}$$

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow (R_1 \times L) - \left(qL \times \frac{L}{2} \right) + \frac{qL^3}{16} = 0 \rightarrow R_1 = \frac{7}{16} qL \quad R_2 = \frac{10}{16} qL \quad R_3 = -\frac{1}{16} qL$$



محاسبه لنگر بیشینه در طول دهانه تیر:

$$M_x = R_1 x - \frac{qx^2}{2} = \frac{7}{16} qLx - \frac{qx^2}{2}$$

$$M_{max} = \frac{dM_x}{dx} = 0 \rightarrow \frac{7}{16} qL - qx = 0 \rightarrow x = \frac{7}{16} L \approx 0.44L$$

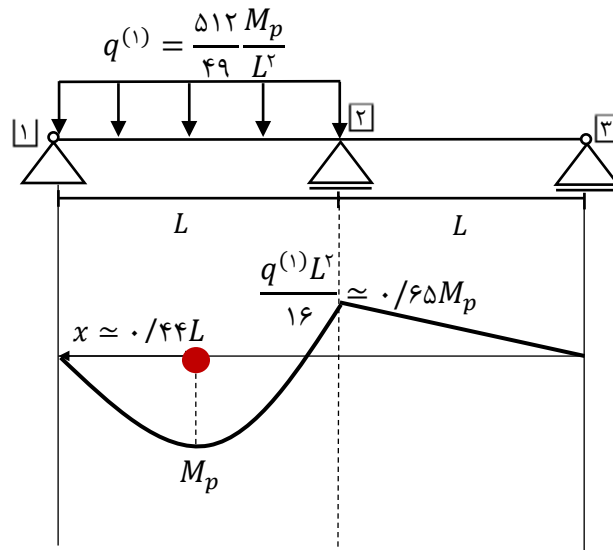
$$M_{max} = \frac{7}{16} qL \left(\frac{7}{16} L \right) - \frac{q \left(\frac{7}{16} L \right)^2}{2} = \frac{49}{512} qL^2 \approx 0.096 qL^2$$

لذا اولین مفصل پلاستیک در نقطه از دهانه تیر به فاصله $0.44L$ تشکیل می‌شود.

لذا اگر لنگر نقطه فوق الذکر اگر به لنگر پلاستیک برسد، اولین مفصل پلاستیک تشکیل خواهد شد، لذا بار شروع خرابی برابر خواهد شد با:

$$M = \frac{49}{512} q L^2 = M_p \rightarrow q_{\text{شروع خرابی}} = \frac{512 M_p}{49 L^2} \approx 10.45 \frac{M_p}{L^2}$$

لذا بار q را تا $\frac{512 M_p}{49 L^2}$ افزایش می‌دهیم:



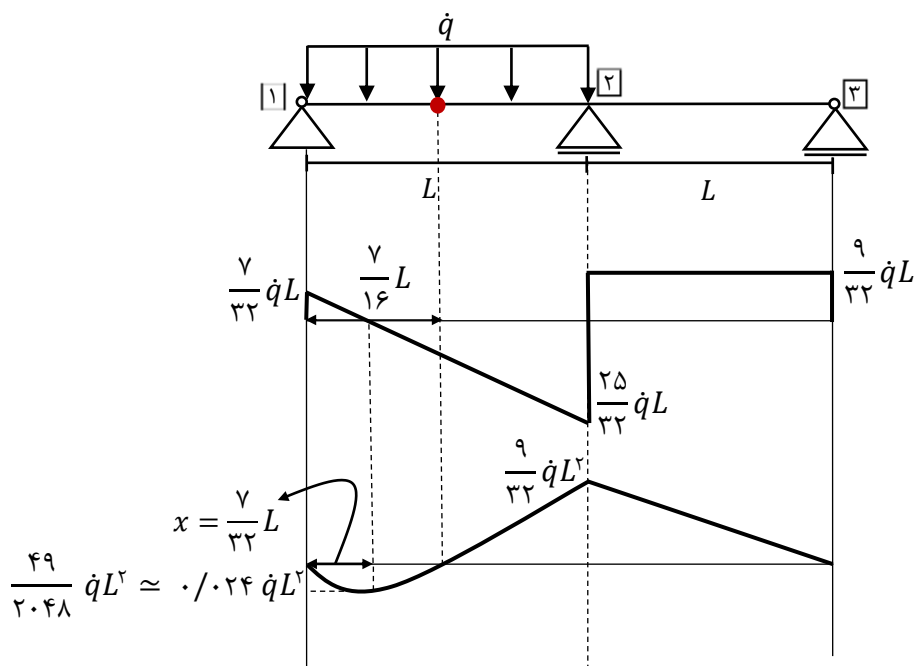
$$R_1^{(1)} = \frac{1}{16} q^{(1)} L = \frac{1}{16} \times \left(\frac{512 M_p}{49 L^2} \right) L = \frac{32 M_p}{49 L} \approx 0.65 \frac{M_p}{L}$$

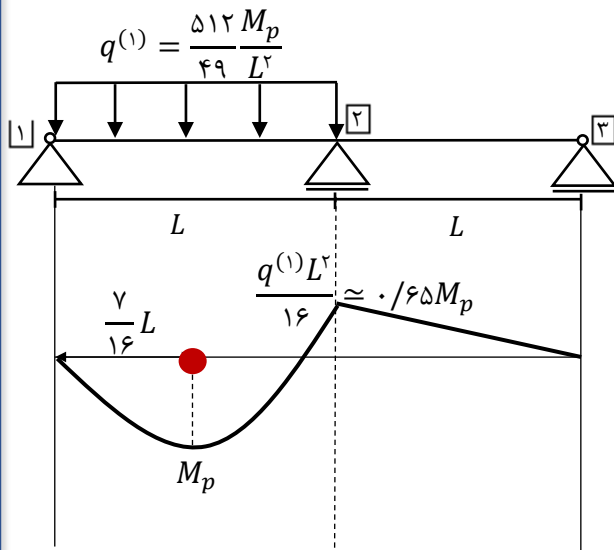
حالا سازه به شکل زیر در می‌آید، لذا اگر پس از تشکیل اولین مفصل پلاستیک، بار q را باندازه $\dot{q}$ افزایش دهیم، خواهیم داشت:

$$\sum M_{\text{مفصل پلاستیک}} = 0 \rightarrow \dot{R}_1 \times \frac{1}{16} - \frac{\dot{q} \left(\frac{1}{16} \right)^2}{2} = 0 \rightarrow \dot{R}_1 = \frac{1}{32} \dot{q} L$$

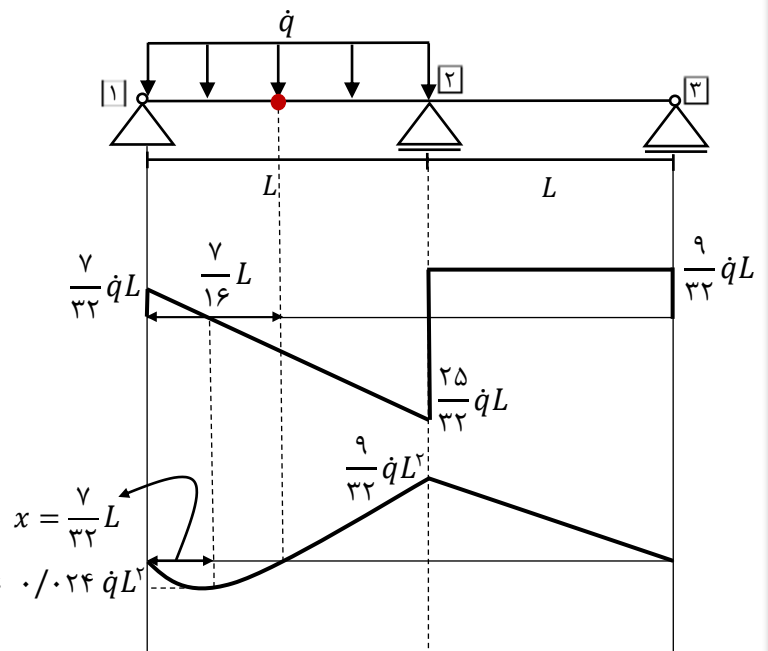
$$\sum M_r = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{32} \dot{q} L \times 2L \right) + \dot{R}_r \times L = \dot{q} L \times \frac{3}{2} L \rightarrow \dot{R}_r = \frac{11}{16} \dot{q} L \quad \dot{R}_r = \frac{9}{32} \dot{q} L$$

$$\sum M_x = \left(\frac{1}{32} \dot{q} L x \right) - \left(\dot{q} \times \frac{x^2}{2} \right) \quad \frac{dM_x}{dx} = 0 \rightarrow \frac{1}{32} \dot{q} L - \dot{q} x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{32} L$$





$$\frac{49}{2048} \dot{q} L^2 \approx 0.024 \dot{q} L^2$$



برای تعیین محل لنگر پلاستیک دوم باید دو منحنی لنگر فوق را با هم جمع کنیم، لذا:

$$\frac{32}{49} M_p + \frac{9}{32} \dot{q} L^2 = M_p \rightarrow \dot{q} = \frac{544}{441} \frac{M_p}{L^2}$$

$$q_{\text{خرابی}} = q^{(1)} + \dot{q} = \frac{512}{49} \frac{M_p}{L^2} + \frac{544}{441} \frac{M_p}{L^2} = \frac{736}{63} \frac{M_p}{L^2} \approx 11.68 \frac{M_p}{L^2} \quad \text{با مثال صفحه ۳۴ جزوه مقایسه شود} \quad \left(6 + 4\sqrt{2} \right) \frac{M_p}{L^2} \approx 11.66 \frac{M_p}{L^2}$$

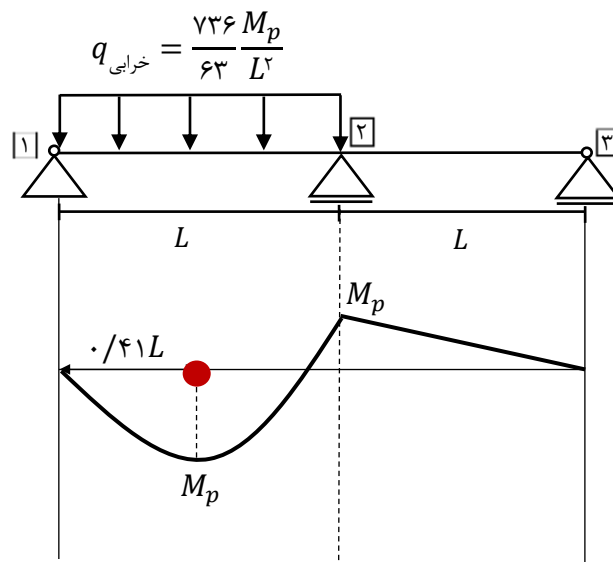
$$q^{(1)} \text{ بار لنگر بار : } \frac{7}{16} q L x - \frac{q x^2}{2} = \frac{7}{16} \left(\frac{512}{49} \frac{M_p}{L^2} \right) L x - \left(\frac{512}{49} \frac{M_p}{L^2} \right) \frac{x^2}{2}$$

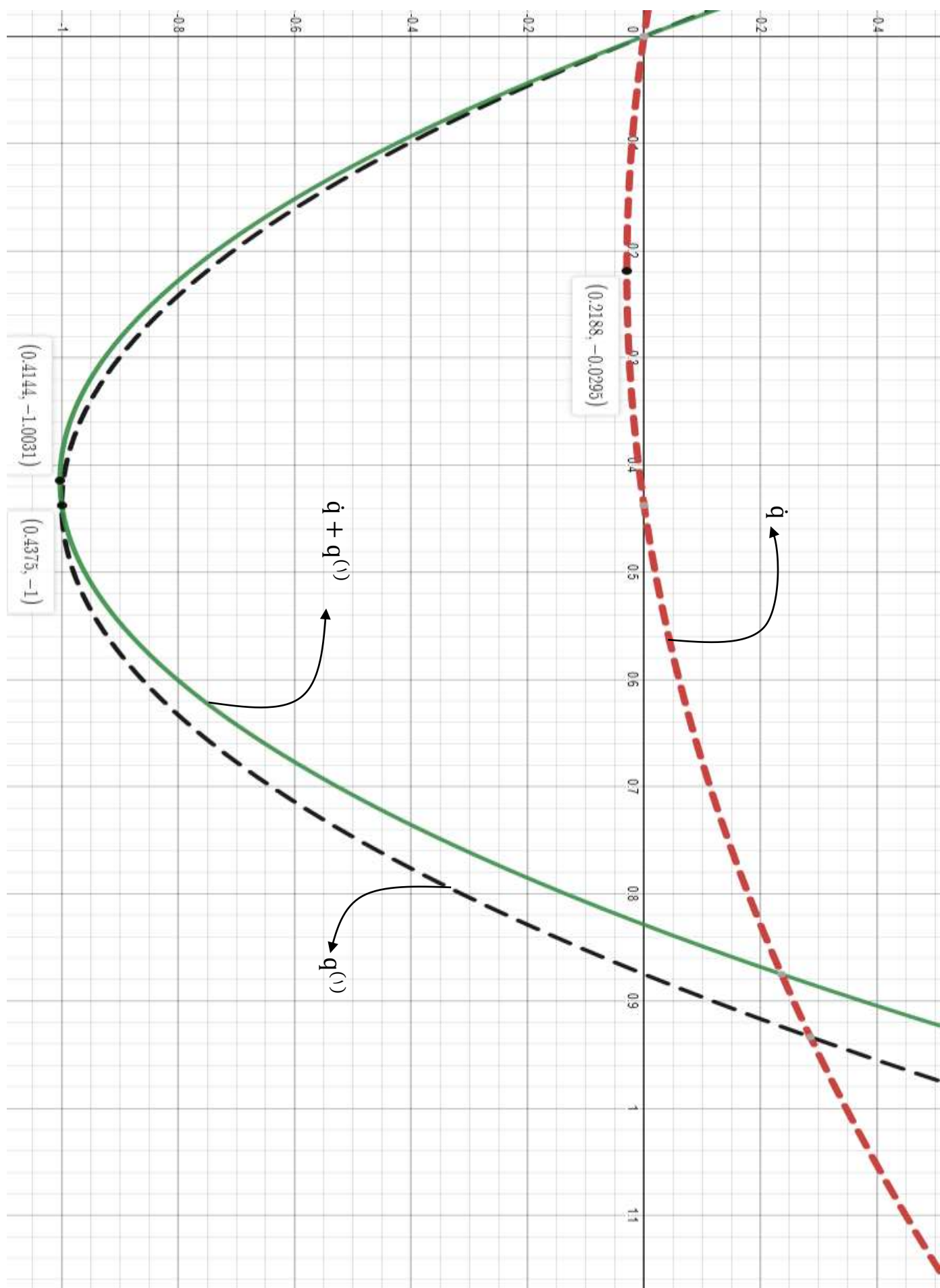
$$\dot{q} \text{ بار لنگر بار : } \frac{7}{32} \dot{q} L x - \dot{q} \times \frac{x^2}{2} = \frac{7}{32} \left(\frac{544}{441} \frac{M_p}{L^2} \right) L x - \left(\frac{544}{441} \frac{M_p}{L^2} \right) \frac{x^2}{2}$$

$$M(x) = \left(\frac{305}{63} \frac{M_p}{L^2} \right) L x - \left(\frac{736}{63} \frac{M_p}{L^2} \right) \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = 0 \rightarrow \left(\frac{305}{63} \frac{M_p}{L^2} \right) L - \left(\frac{736}{63} \frac{M_p}{L^2} \right) x = 0 \rightarrow x = \frac{305}{736} L \approx 0.41 L$$

همانطور که مشاهده می کنید، مفصل پلاستیک از نقطه $0.44L$ به نقطه $0.41L$ شیفت پیدا کرد.





فصل چهارم

«تحلیل حدی»

مقدمه

برخلاف فصل سوم که گام به گام و عضو به عضو مراحل تسلیم پیگیری شد، در فصل چهارم مستقیماً نیروی خرابی محاسبه می‌شود:

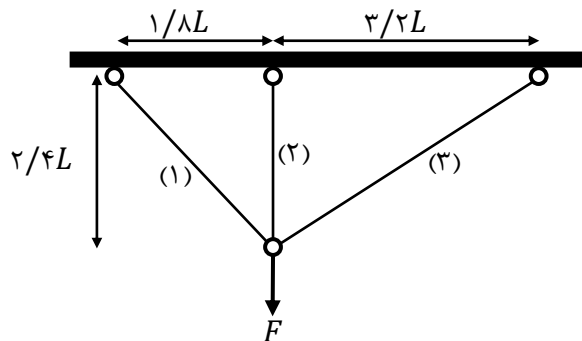
۱. یک مکانیزم خرابی دلخواه فرض می‌شود.

۲. بر اساس فرض انجام شده و با استفاده از معادلات تعادل نیروی خرابی محاسبه می‌شود.

۳. نیروی بقیه اعضا محاسبه شده و صحت فرض بررسی می‌شود.

برای مثال:

سازه زیر از سه میله با مساحت مقطع (A) و مدول الاستیسیته (E) یکسان تشکیل شده است. اگر نیروی تسلیم میله‌ها برابر (S) باشد. می‌خواهیم بار خرابی سازه را بدست آوریم.

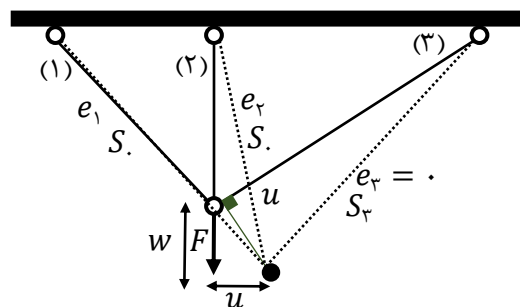


سازه یک درجه نامعین است. بنابراین برای ناپایدار شدن دو میله باید تسلیم شود و یک میله الاستیک بماند و در نتیجه سه حالت مکانیزم خواهیم داشت. ابتدا مکانیزم‌های خرابی محتمل را رسم می‌کنیم.

الف) فرض می‌کنیم، میله ۱ و ۲ تسلیم شده و میله ۳ الاستیک باقی مانده است. چون میله ۳ الاستیک مانده است، لذا فرض می‌کنیم تغییر طول پلاستیک آن برابر صفر است. لذا مطابق شکل زیر بصورت عمود بر حالت اولیه تغییر شکل می‌دهد.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -0.6S + 0.8S_3 = 0$$

$$S_3 = \frac{3}{4}S$$



$$e_1 = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}}}_{\text{راستای کوتاه}} u + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{8}}}_{\text{راستای بلند}} w$$

$$e_2 = w$$

$$e_3 = \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{8}}}_{\text{راستای بلند}} u + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}}}_{\text{راستای کوتاه}} w$$

چون فرض کردیم میله ۳ تسلیم نشده است لذا $e_3 = 0$ (تغییر شکل پلاستیک مساوی صفر) خواهد بود، بنابراین:

$$e_3 = -\frac{1}{\sqrt{8}}u + \frac{1}{\sqrt{6}}w = 0 \rightarrow u = \frac{3}{4}w$$

لذا با جایگذاری در روابط خواهیم داشت:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}u + \frac{1}{\sqrt{8}}w \xrightarrow{u=\frac{3}{4}w} e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{3}{4}w\right) + \frac{1}{\sqrt{8}}w = \frac{5}{4}w$$

$$e_2 = w$$

$$e_3 = 0$$

اعمال روش انرژی:

کار داخلی = کار خارجی

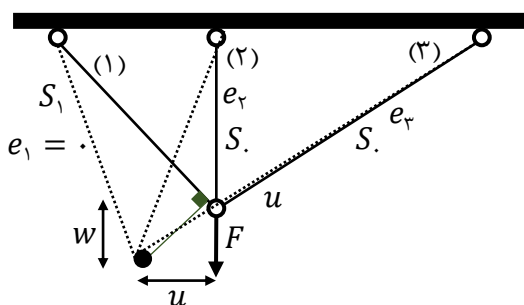
$$F \times w = S_1 \times \frac{1}{\sqrt{2}}w + S_2 \times w + \underbrace{S_3 \times 0}_{\text{کار داخلی میله ۳}}$$

$$F_{\text{خرابی}} = \frac{2}{\sqrt{2}}S$$

ب) فرض می‌کنیم، میله ۲ و ۳ تسلیم شده و میله ۱ الاستیک باقی بماند. چون میله ۱ الاستیک مانده است، لذا فرض می‌کنیم تغییر طول پلاستیک آن مساوی صفر است. لذا مطابق شکل بصورت عمود بر حالت اولیه تغییر شکل می‌دهد.

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -0.6S_1 + 0.8S_2 = 0$$

$$S_1 = \frac{4}{3}S_2$$



همانطور که از معادله تعادل، نیروی میله ۱ را حساب کردیم، باید نتیجه بگیریم که مکانیزم مفروض فوق، خلاف فرض اولیه است. چون نیروی میله ۱ بیشتر از نیروی تسلیم میله است ($S_1 = 1/3 S_2$) که این غیرممکن است. مطابق نتایج فصل قبل:

$$e_1 = \underbrace{-0.6}_{\text{راستای کوتاه}} u + \underbrace{0.8}_{\text{راستای بلند}} w$$

$$e_2 = w$$

$$e_3 = \underbrace{0.8}_{\text{راستای بلند}} u + \underbrace{-0.6}_{\text{راستای کوتاه}} w$$

چون فرض کردیم میله ۱ تسلیم نشده است لذا $e_1 = 0$ خواهد بود، بنابراین:

$$e_1 = -0.6u + 0.8w = 0 \rightarrow u = \frac{4}{3}w$$

لذا با جایگذاری در روابط خواهیم داشت:

$$e_1 = 0$$

$$e_2 = w$$

$$e_3 = 0.8\left(\frac{4}{3}w\right) + (-0.6)w = \frac{5}{3}w$$

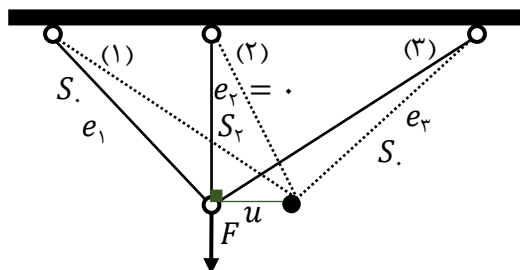
اعمال روش انرژی:

کار داخلی = کار خارجی

$$F \times w = S_1 \times \frac{5}{3}w + S_2 \times w + \underbrace{\text{کار داخلی میله ۱}}_{=0}$$

$$F_{\text{خرابی}} = \frac{8}{3}S_2$$

پ) فرض می‌کنیم، میله ۱ و ۳ تسلیم شده و میله ۲ الاستیک باقی مانده است. چون میله ۲ الاستیک مانده است، لذا فرض می‌کنیم تغییر طول پلاستیک آن مساوی صفر است. لذا مطابق شکل بصورت عمود بر حالت اولیه تغییر شکل می‌دهد.



$$e_1 = \underbrace{-0.6}_{\text{راستای کوتاه}} u$$

$$e_2 = w$$

$$e_3 = \underbrace{-0.8}_{\text{راستای بلند}} u$$

چون فرض کردیم میله ۲ تسلیم نشده است لذا $e_2 = 0$ خواهد بود، بنابراین:

$$e_2 = 0 \rightarrow w = 0$$

لذا با جایگذاری در روابط خواهیم داشت:

$$e_1 = 0/6u$$

$$e_2 = 0$$

$$e_3 = -0/8u$$

اعمال روش انرژی:

کار داخلی = کار خارجی

راستای جابجایی عمود بر راستای نیرو است

کار داخلی میله ۲

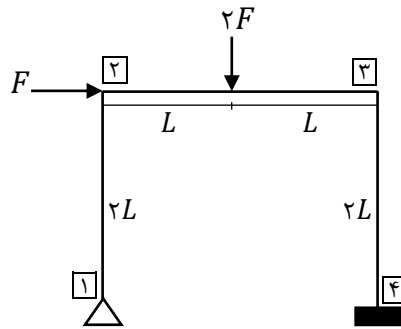
$$\overbrace{F \times 0}^{\text{راستای جابجایی عمود بر راستای نیرو است}} = S_1 \times 0/6u - S_2 \times 0/8u + \underbrace{0}_{\text{کار داخلی میله ۲}}$$

$$F_{\text{خرابی}} = \infty$$

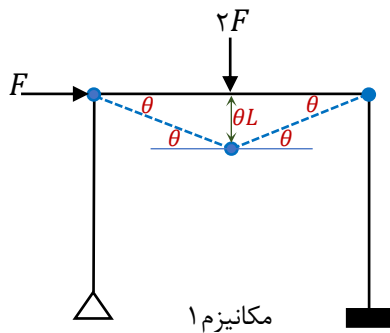
اگر در یک مکانیزم، کار خارجی صفر باشد، آن مکانیزم غلط است.

لذا تنها مکانیزم محتمل، مکانیزم(الف) خواهد بود.

مثال ۱: بار خرابی قاب زیر را تحلیل و بررسی کنید. (تحلیل حدی)



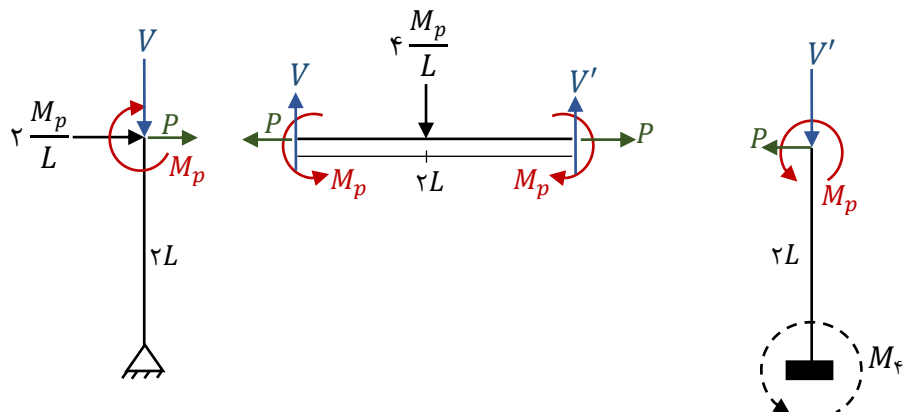
بررسی مکانیزم ۱:



کار خارجی = کار داخلی

$$(M_p \times \theta) + (M_p \times 2\theta) + (M_p \times \theta) = 2F \times \theta L$$

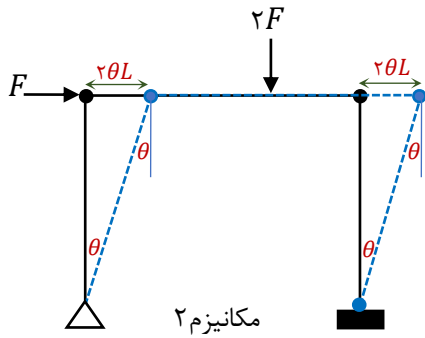
$$F = \frac{4M_p \theta}{2\theta L} \rightarrow F = 2 \frac{M_p}{L}$$



$$\sum M_1 = 0 \rightarrow (P \times 2L) + M_p + \left(2 \frac{M_p}{L} \times 2L\right) = 0 \rightarrow P = -2/5 \frac{M_p}{L}$$

$$\sum M_4 = 0 \rightarrow M_4 + M_p + \left(-2/5 \frac{M_p}{L} \times 2L\right) = 0 \rightarrow M_4 = 4M_p \quad \text{غیر ممکن}$$

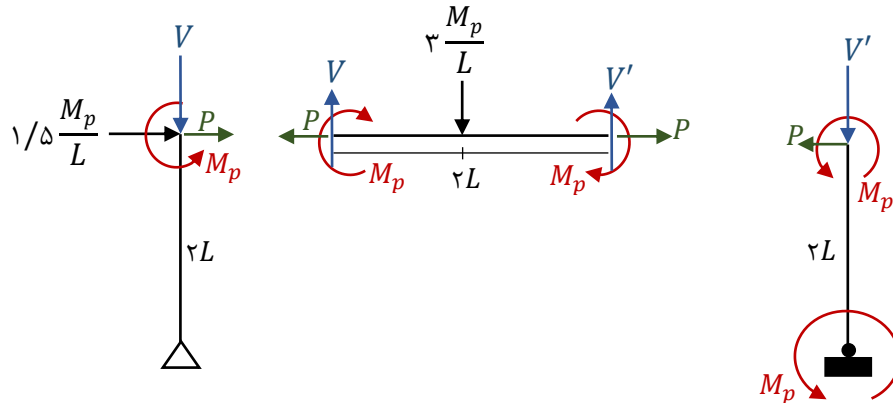
بررسی مکانیزم ۲:



کار خارجی = کار داخلی

$$(M_p \times 2\theta) = F \times 2\theta L$$

$$F = \frac{2M_p \theta}{2\theta L} \rightarrow F = \frac{1}{5} \frac{M_p}{L}$$

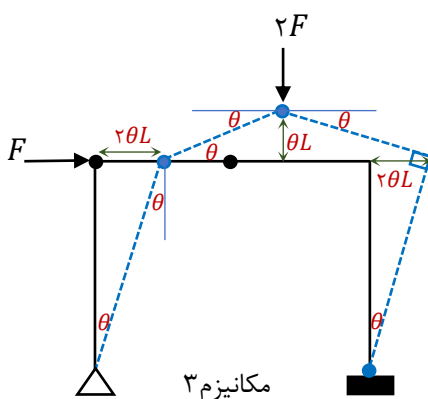


$$\sum M_1 = 0 \rightarrow (P \times 2L) - M_p + \left(\frac{1}{5} \frac{M_p}{L} \times 2L \right) = 0 \rightarrow P = -\frac{M_p}{L}$$

$$\sum M_2 = 0 \rightarrow (V \times 2L) + M_p - \left(3 \frac{M_p}{L} \times L \right) + M_p = 0 \rightarrow V = \frac{1}{2} \frac{M_p}{L}$$

$$\sum M_{\text{وسط دهانه}} = (V \times L) + M_p = \frac{1}{2} \frac{M_p}{L} \times L + M_p = \frac{3}{2} M_p \quad \text{غیرممکن}$$

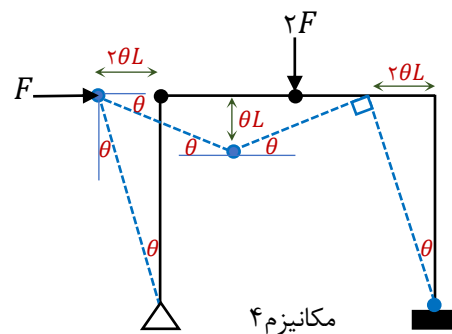
بررسی مکانیزم ۳ و ۴:



کار خارجی = کار داخلی

$$(M_p \times \Delta\theta) = \overbrace{F \times 2\theta L - 2F \times \theta L}^{\text{صفر}}$$

$$F = \infty$$



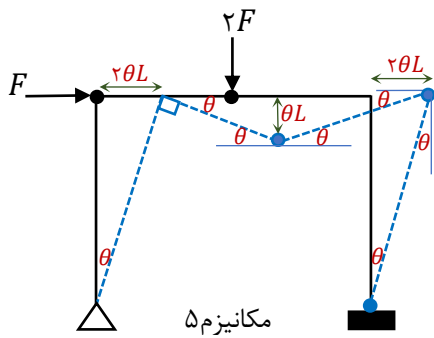
کار خارجی = کار داخلی

$$(M_p \times \Delta\theta) = \overbrace{2F \times \theta L - F \times 2\theta L}^{\text{صفر}}$$

$$F = \infty$$

همانطور که قبلاً ذکر شد، اگر در یک مکانیسم، کار خارجی منفی یا صفر باشد، آن مکانیسم غیرممکن است.

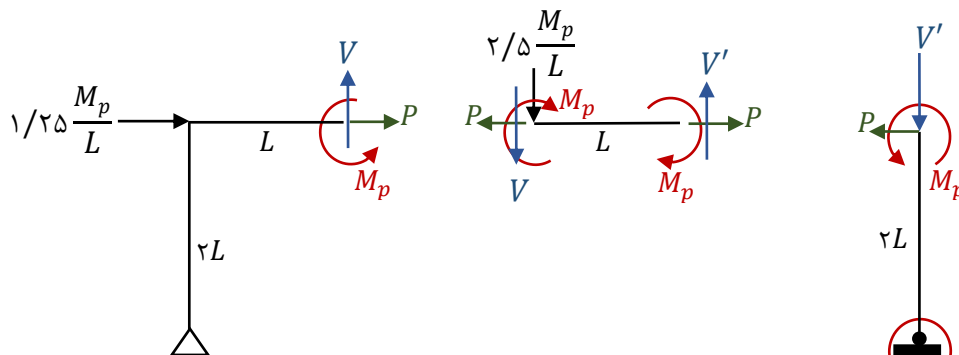
بررسی مکانیزم ۵:



کار خارجی = کار داخلی

$$(M_p \times \delta \theta) = (F \times \delta \theta L) + (2F \times \delta \theta L)$$

$$F = \frac{\delta M_p \theta}{\delta \theta L} \rightarrow F = \frac{1}{2.5} \frac{M_p}{L}$$



$$\sum M_{\phi} = 0 \rightarrow (P \times 2L) + M_p + M_p = 0 \rightarrow P = -\frac{M_p}{L}$$

$$\sum M_{\psi} = 0 \rightarrow (V \times L) + M_p - \left(-\frac{M_p}{L} \times 2L\right) - \frac{1}{2.5} \frac{M_p}{L} \times 2L = 0 \rightarrow V = -\frac{1}{2} \frac{M_p}{L}$$

$$\sum M_{\gamma} = (V \times L) + M_p = \left(-\frac{1}{2} \frac{M_p}{L} \times L\right) + M_p = \frac{1}{2} M_p \quad [O.K.]$$

جمع‌بندی:

محدوده‌ی بار ایمن، بین خود بار خرابی و تقسیم بار خرابی بر ضریب اطمینان است. (خرابی F ایمن $\leq F \leq \frac{F_{خرابی}}{\text{ضریب اطمینان}}$) و مقدار ضریب اطمینان برابر است با ضریب لنگر پلاستیک در نقطه بحرانی.

مکانیزم	بار خرابی	لنگر در نقطه بحرانی	ضریب اطمینان	محدوده‌ی بار ایمن
۱	$F = 2 \frac{M_p}{L}$	$M_{\phi} = 4M_p$	۴	$\frac{M_p}{2L} \leq F_{\text{ایمن}} \leq 2 \frac{M_p}{L}$
۲	$F = 1/5 \frac{M_p}{L}$	$M_{\text{وسط دهانه}} = \frac{3}{2} M_p$	۱/۵	$\frac{M_p}{L} \leq F_{\text{ایمن}} \leq 1/5 \frac{M_p}{L}$
۳	$F = \infty$			
۴	$F = \infty$			
۵	$F = 1/2.5 \frac{M_p}{L}$	$M_{\gamma} = \frac{1}{2} M_p$		$F_{\text{ایمن}} \leq 1/2.5 \frac{M_p}{L}$

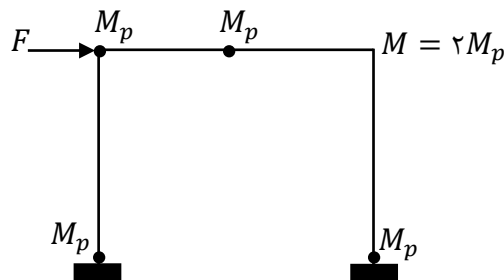
شرایط تعیین مکانیزم خرابی سیستم:

باید هر سه شرط زیر ارضاء شود.

۱- قابل قبول از نظر پلاستیسیته: یعنی تنش در همه‌ی اعضا نباید از تنش تسلیم تجاوز نماید.

برای مثال:

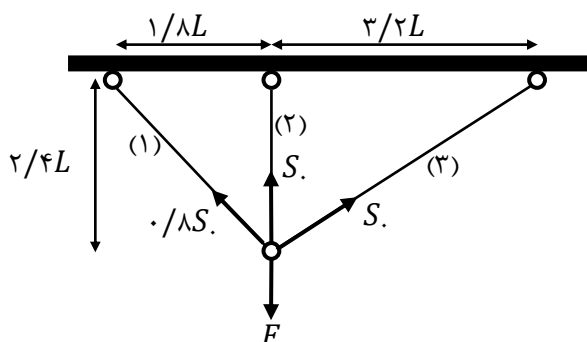
قاب زیر از لحاظ پلاستیسیته قابل قبول نیست، چون لنگر در یکی از اعضای سازه از لنگر پلاستیک تجاوز کرده است.



۲- قابل قبول از نظر استاتیکی: اولاً از نظر پلاستیسیته قابل قبول باشد، ثانیاً تعادل استاتیکی برقرار باشد.

برای مثال:

خرپای زیر با اینکه از نظر پلاستیسیته قابل قبول است ولی چون تعادل استاتیکی در آن برقرار نیست، لذا از نظر استاتیکی قابل قبول نیست.

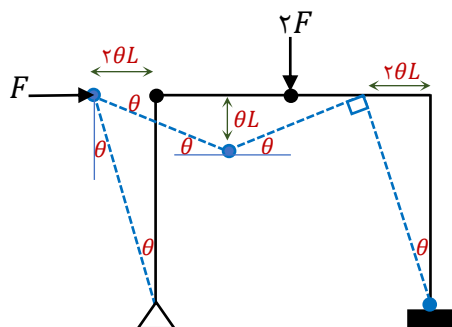


$$\sum F_x = 0 \rightarrow 0/6 \times (0/8S) \neq 0/8 \times S.$$

۳- قابل قبول از نظر سینمایی (حرکتی): مکانیزم‌های خرابی باعث ایجاد کار خارجی مثبت و مخالف صفر در سیستم شود.

برای مثال:

در قاب زیر چون کار خارجی برابر صفر است لذا از لحاظ سینمایی قابل قبول نیست.



$$W_{ext} = 2F \times \theta L - F \times 2\theta L = 0$$

کار خارجی :

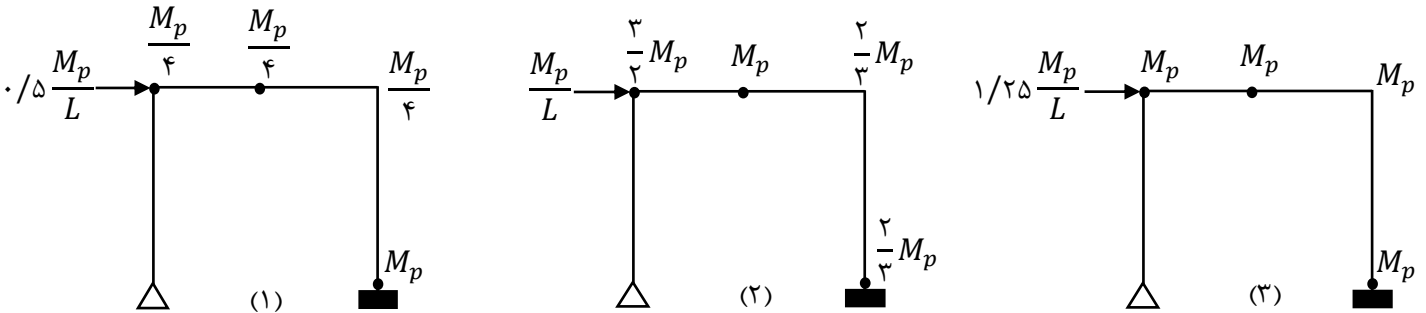
قضایای بنیادی تحلیل حدی

قضیه حد پایین (Lowe Bound Theorem):

ضریب اطمینان در سازه های قابل قبول استاتیکی، بزرگترین ضریب است. یعنی از بین مکانیزم ها با بار های خرابی مختلف، بار خرابی محتمل بزرگترین بار خواهد بود.

برای مثال:

در قاب های زیر با فرض اینکه هر سه از نظر استاتیکی قابل قبول هستند، بار خرابی برابر است با بار خرابی مکانیزم ۳ که مقدار آن $\frac{1}{25} \frac{M_p}{L}$ است.

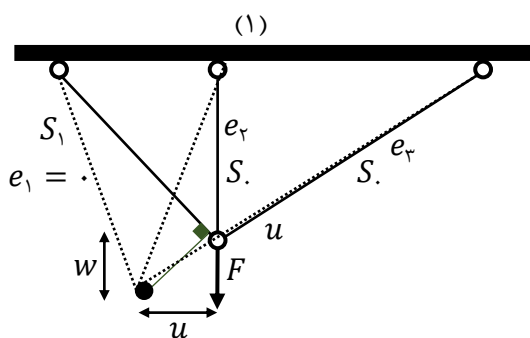


قضیه حد بالا (Upper Bound Theorem):

ضریب اطمینان در سازه های قابل قبول سینماتیکی، کمترین ضریب است. یعنی از بین مکانیزم ها با بار های خرابی مختلف، بار خرابی محتمل کوچکترین بار خواهد بود.

برای مثال:

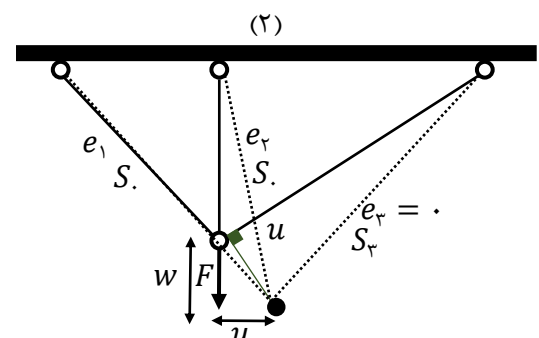
در خرپاهای زیر با فرض اینکه هر دو از نظر سینماتیکی قابل قبول هستند، بار خرابی برابر است با بار خرابی مکانیزم ۲ که مقدار آن $\frac{2}{25} S$ است.



کار داخلی = کار خارجی

$$F \times w = S_1 \times \frac{5}{3} w + S_2 \times w + \text{کار داخلی میله ۱}$$

$$F_{\text{خرابی}} = \frac{2}{67} S.$$

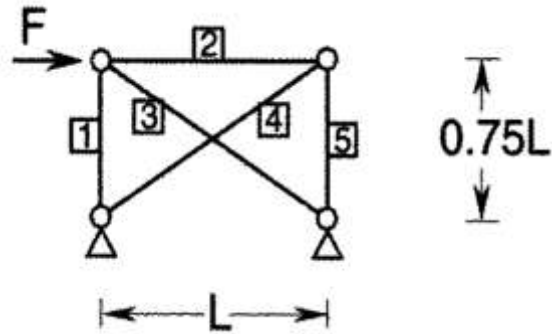


کار داخلی = کار خارجی

$$F \times w = S_1 \times \frac{1}{25} w + S_2 \times w + \text{کار داخلی میله ۳}$$

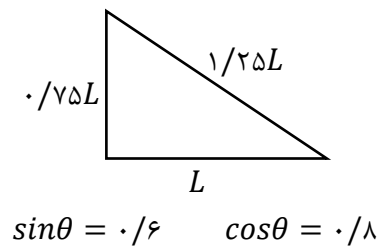
$$F_{\text{خرابی}} = \frac{2}{25} S.$$

مثال ۱: با بررسی مکانیزم های خرابی حرکتی (سینماتیک) بار خرابی زیر را بدست آورید.



حل:

بررسی مکانیزم ۱: (فرض می کنیم میله های ۳ و ۴ تسلیم شده است.)



کار داخلی = کار خارجی

$$F \times u = -S_1 \times (-0.8u) + S_2 \times 0.8u$$

$$F_{\text{خرابی}} = 1/6 S_1$$

بررسی مکانیزم ۲: (فرض می کنیم میله های ۳ و ۲ تسلیم شده است.)

کار داخلی = کار خارجی

$$F \times u = (-S_1 \times (-u)) + (-S_2 \times (-0.8u))$$

$$F_{\text{خرابی}} = 1/8 S_1$$

بررسی صحت مکانیسم:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 0.6 S_1 = S_1$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow 0.8 S_1 = S_2 \rightarrow S_2 = 1/25 S_1$$

غیر ممکن

بررسی مکانیزم ۳: (فرض می کنیم میله های ۴ و ۲ تسلیم شده است.)

کار داخلی = کار خارجی

$$F \times u = (S_1 \times u) + (S_2 \times (0.8u))$$

$$F_{\text{خرابی}} = 1/8 S_1$$

بررسی صحت مکانیسم:

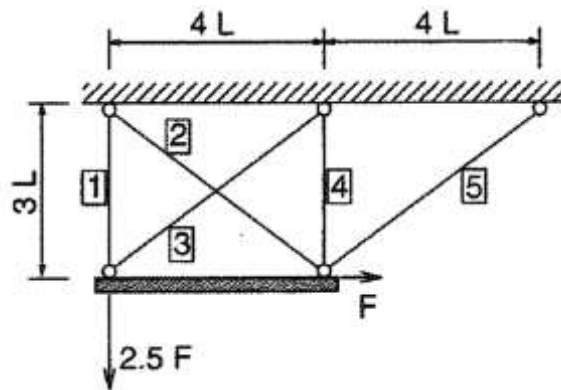
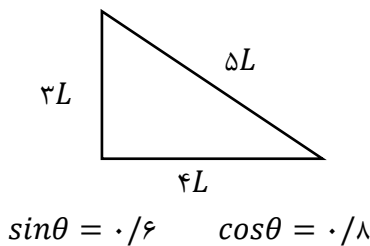
$$\sum F_y = 0 \rightarrow 0.6 S_1 = S_2$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow 0.8 S_1 = S_2 \rightarrow S_2 = 1/25 S_1$$

غیر ممکن

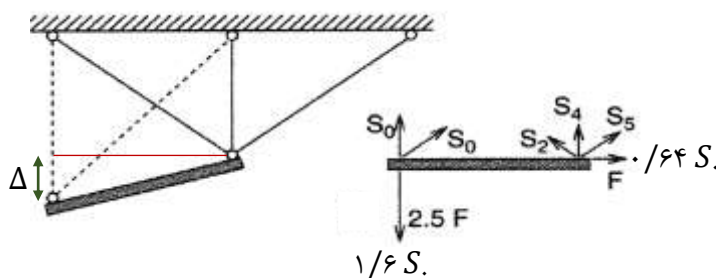
چون مکانیزم ها قابل قبول سینماتیکی هستند لذا بار خرابی محتمل، کوچکترین بار خواهد بود. لذا مکانیزم ۱، مکانیزم خرابی خواهد بود.

مثال ۲: با بررسی مکانیزم های خرابی حرکتی (سینماتیک) بار خرابی سیستم زیر را بدست آورید.



حل:

بررسی مکانیزم ۱: (فرض می کنیم میله های ۳ و ۴ تسلیم شده است).



$$\begin{aligned} \text{کار داخلی} &= \text{کار خارجی} \\ 2/5 F \times \Delta &= (S_3 \times \Delta) + (S_4 \times 4/5 \Delta) \\ F_{\text{خرابی}} &= 0/64 S. \end{aligned}$$

همانطور که مشاهده می کنید سازه فوق یک درجه نامعین است و نمی توان آن را تحلیل کرد و مقادیر S_3 و S_4 و S_5 را محاسبه کرد. لذا یکی از نیروها را معلوم فرض می کنیم و بقیه نیروها را بر حسب آن بدست می آوریم. با فرض معلوم بودن S_5 خواهیم داشت:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow 0/8 S_3 - 0/8 S_4 + 0/8 S_5 + 0/64 S. = 0 \rightarrow S_4 = 1/8 S_3 + S_5$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 0/6 S_3 + S_4 - 1/6 S_5 + S_6 + 0/6 S_7 + 0/6 \left(\begin{matrix} S_7 = 1/8 S_3 + S_5 \\ \bar{S}_7 \end{matrix} \right) = 0 \rightarrow S_6 = -1/8 S_3 - 1/2 S_5$$

می دانیم که میله های S_3 و S_4 و S_5 تسلیم نشده اند، یعنی:

$$-S. < S_4 < S. \rightarrow -S. < 1/8 S_3 + S_5 < S. \rightarrow \boxed{-2/8 S. < S_5 < -0/8 S.}$$

$$-S. < S_6 < S. \rightarrow -S. < -1/8 S_3 - 1/2 S_5 < S. \rightarrow \boxed{-1/73 S. < S_5 < -0/67 S.}$$

$$\boxed{-S. < S_5 < S.}$$

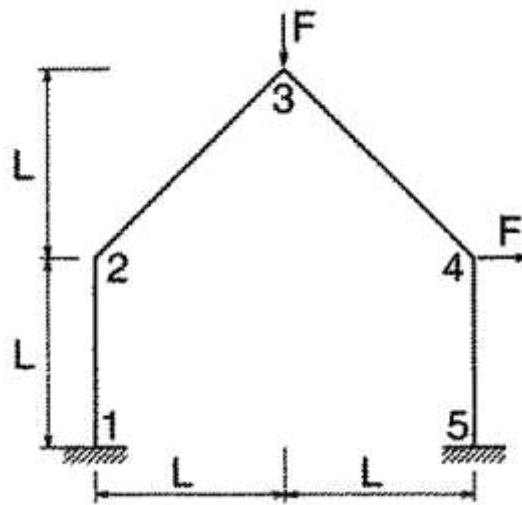
همانطور که مشاهده می کنید برای S_5 سه بازه متفاوت بدست آمد. اگر این بازه ها دارای اشتراک باشند، یعنی مکانیزم مفروض درست است. در غیر این صورت مکانیزم انتخابی نادرست خواهد بود. لذا:

$$\boxed{-S. < S_5 < -0/8 S.}$$

که اگر بجای S_5 مقادیر فوق را جایگذاری کنیم، سازه از نظر پلاستیسیته و استاتیکی قابل قبول خواهد بود. لذا مکانیزم انتخابی (مفروض) و نیرو بحرانی محاسبه شده درست است.

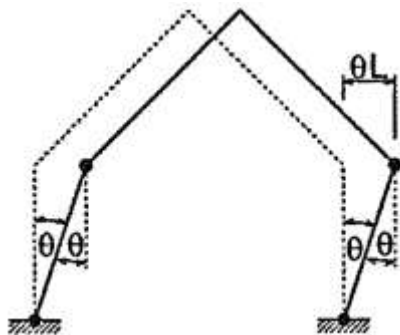
اگر مکانیزم مفروض، اشتباه بود در این صورت هیچ مقدار مشترکی برای S_5 بدست نمی آید.

مثال ۳: با بررسی مکانیزم های خرابی حرکتی (سینماتیک) بار خرابی سیستم زیر را بدست آورید.



حل:

مکانیزم ۱:



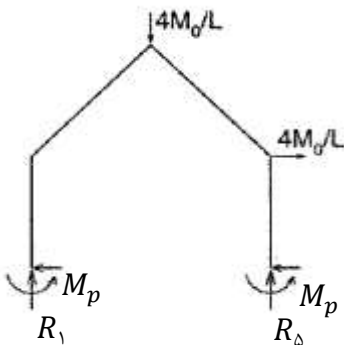
کار داخلی = کار خارجی

$$F \times \theta L = 4M_p \theta$$

$$F_{\text{خرابی}} = \frac{4M_p}{L}$$

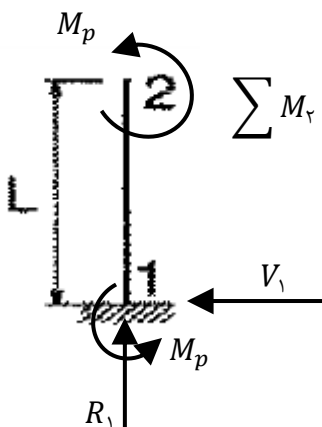
بررسی صحت مکانیزم ۱:

باید لنگر در تمام گره ها، مساوی یا کوچکتر از لنگر پلاستیک باشد. (جهت لنگرهای پلاستیک اعمالی را باید درست وارد کنیم)



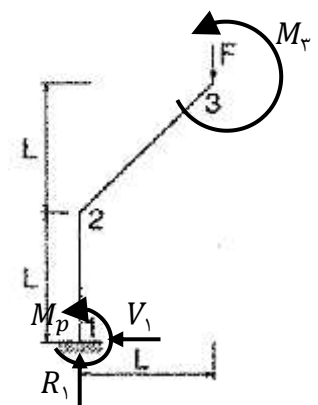
$$\sum M_{\delta} = 0 \rightarrow R_1 \times 2L - M_p - M_p - \frac{4M_p}{L}L + \frac{4M_p}{L}L = 0 \rightarrow R_1 = \frac{M_p}{L}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_2 = \frac{2M_p}{L}$$



$$\sum M_r = 0 \rightarrow V_1 \times L - M_p - M_p = 0$$

$$V_1 = \frac{2M_p}{L}$$



$$\sum M_r = -M_p + R_1 \times L + V_1 \times 2L$$

$$M_r = -M_p + M_p + 4M_p$$

پس مکانیزم غلط است $M_r = 4M_p \not\leq M_p$

مکانیزم ۲:

همانطور که مشاهده می کنید، سازه از سه قسمت A و B و C تشکیل شده است.

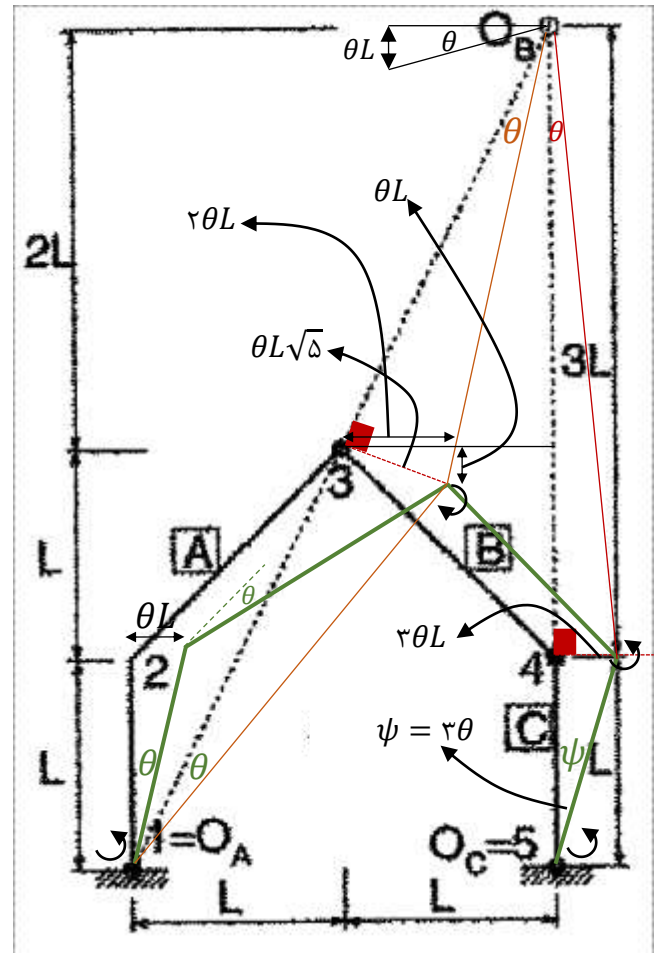
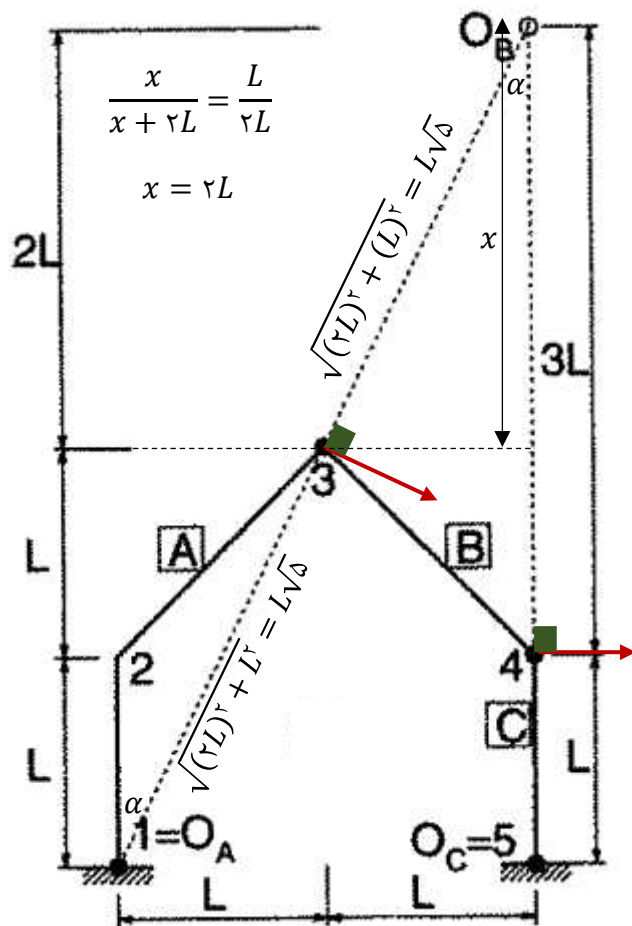
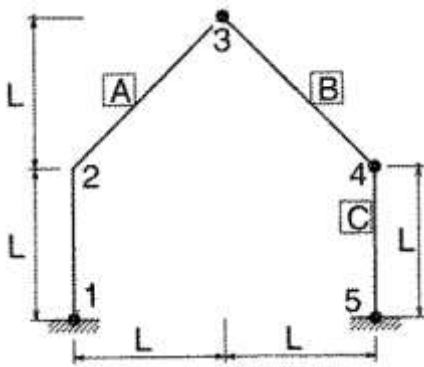
چون نقاط ۱ و ۵ مقید هستند مرکز دوران عضو A نقطه ۱ و مرکز دوران عضو C نقطه ۵ است.

از اتصال ابتدا و انتهای هر عضو، شعاع دوران عضو بدست می آید.

هر عضو عمود بر شعاع دوران تغییرشکل می دهد.

چون عضو B مقید نیست، لذا مرکز دوران عضو B، محل تلاقی شعاع های دوران عضو A و B

است. یعنی:



کار داخلی = کار خارجی

$$(F \times \theta L) + (F \times 2\theta L) = M_p \theta + M_p 2\theta + M_p 3\theta + M_p 3\theta$$

$$F_{\text{خرابی}} = 2/5 \frac{M_p}{L}$$

بررسی صحت مکانیزم ۲:

قطعه C

$$\sum \overline{M}_\varphi = V_\delta \times L - M_p - M_p = 0 \rightarrow V_\delta = 2 \frac{M_p}{L}$$

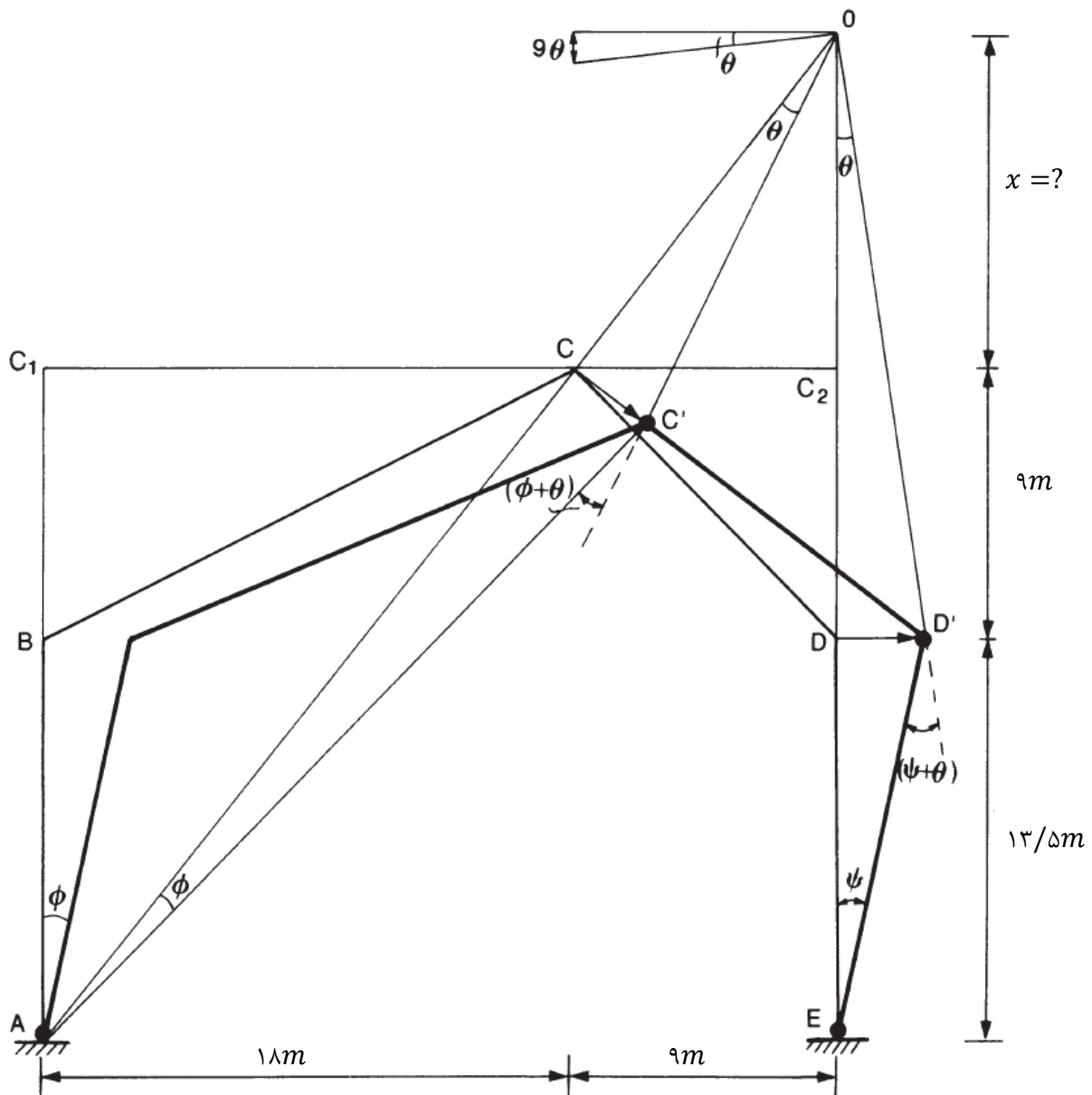
قطعه B,C

$$\sum \overline{M}_r = (R_\delta \times L) - M_p - M_p + M_p + \left(2/5 \frac{M_p}{L} \times L \right) = 0 \rightarrow R_\delta = 1/5 \frac{M_p}{L}$$

$$\sum \overline{M}_\delta = R_1 \times 2L - M_p - M_p - \left(2/5 \frac{M_p}{L} \times L \right) + \left(2/5 \frac{M_p}{L} \times L \right) = 0 \rightarrow R_1 = \frac{M_p}{L} \quad , \quad \sum F_x = 0 \rightarrow V_1 = 0/5 \frac{M_p}{L}$$

$$\sum \overline{M}_r = \left(0/5 \frac{M_p}{L} \times L \right) - M_p + \left(\frac{M_p}{L} \times L \right) = 0/5 M_p < M_p \quad [O.K.]$$

در مثال قبلی اگر ابعاد متقارن نبود:



$$\frac{OC_r}{CC_r} = \frac{C_1A}{C_1C} \rightarrow OC_r = \frac{C_1A}{C_1C} CC_r = \frac{22/5 \times 9}{18} = 11/25 m$$

$$(AC)(\phi) = (OC)(\theta)$$

$$\phi = \frac{OC}{AC} \theta = \frac{CC_r}{C_1C} \theta = \frac{9}{18} \theta = \frac{\theta}{2}$$

$$(DE)(\psi) = (OD)(\theta)$$

$$\psi = \frac{OD}{DE} \theta = 1/5 \theta$$

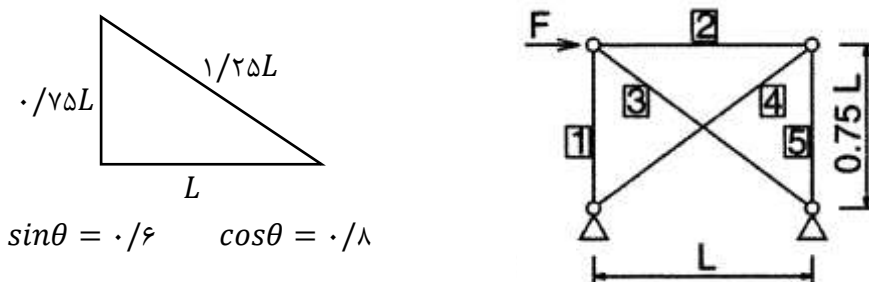
روش دیگر جهت تعیین بار خرابی در سازه های نامعین

در سازه های معین میله ای اضافی نداریم و پس از تشکیل اولین مفصل پلاستیک سازه خراب می شود و پایان خرابی یکسان است. ولی در سازه های نامعین اصطلاحاً ما میله ای زاپاس داریم و هرچه درجه نامعینی افزایش می یابد، تعداد میله های تسلیم شده ی لازم برای ناپایداری سازه بیشتر خواهد شد.

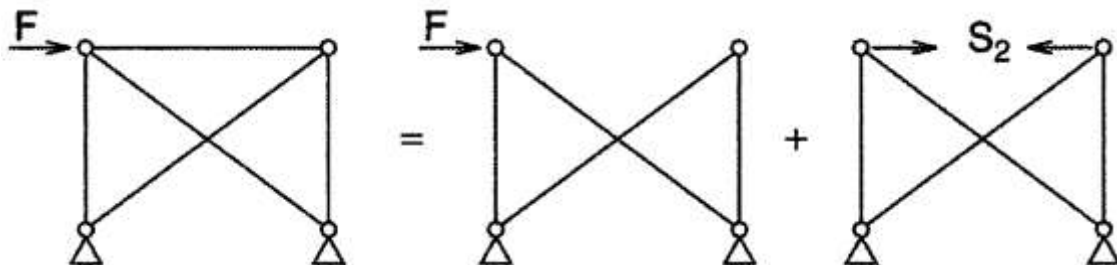
فرض کنید یک سازه یک درجه نامعین داریم، در روش جدید یکی از میله ها را حذف می کنیم و سازه معین می شود. سپس سازه را تحلیل می کنیم. البته سازه ظاهراً نامعین است چون نیروی میله ای حذف شده را نمی دانیم و باید مقدار آنرا در معادلات بصورت مجهول قرار دهیم و در تحلیل نیروی اعضا بر حسب نیروی مجهول عضو حذف شده محاسبه خواهد شد.

بعد از تحلیل سازه و یافتن نیروی اعضا بر حسب نیروی مجهول، شرط قابل قبول بودن استاتیکی را اعمال می کنیم و برای نیروی مجهول بازه های مختلفی ایجاد خواهد شد و ما حداکثر مقدار ممکن را برای نیروی مجهول انتخاب کرده و در معادلات قرار می دهیم و نیروی خرابی را بدست می آوریم. برای مثال:

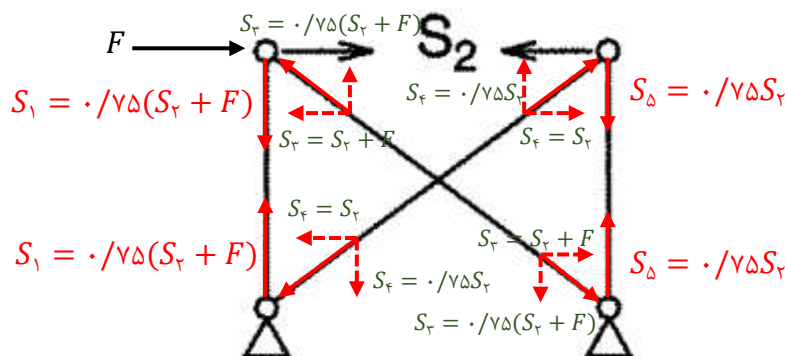
در سازه زیر می خواهیم نیروی خرابی را محاسبه کنیم:



طبق توضیحات داده شده، سازه مقابل یک درجه نامعین است. لذا ابتدا یکی از میله ها را حذف و بجایش نیروی مجهول قرار می دهیم تا سازه معین شود (مثل میله ۲):



حالا سازه را تحلیل کرده و نیروی هر میله را حساب می کنیم:



لذا نیروی هر میله عبارت است از:

$$S_1 = 0.6/2.5 (S_r + F) \quad S_2 = 0.8/2.5 (S_r + F) \quad S_3 = 0.6/2.5 S_r \quad S_4 = 0.8/2.5 S_r$$

اعمال شرط قابل قبول بودن استاتیکی سازه:

$$-S. \leq S_1 \leq S. \rightarrow -S. \leq 0.75 (S_r + F) \leq S. \rightarrow -S. \leq 0.75 S_r + 0.75 F \leq S. \rightarrow -S. - 0.75 F \leq 0.75 S_r \leq S. - 0.75 F \rightarrow \boxed{-\frac{4}{3} S. - F \leq S_r \leq \frac{4}{3} S. - F}$$

$$-S. \leq S_r \leq S. \rightarrow -S. \leq 1/25 (S_r + F) \leq S. \rightarrow -S. \leq 1/25 S_r + 1/25 F \leq S. \rightarrow -S. - 1/25 F \leq 1/25 S_r \leq S. - 1/25 F \rightarrow \boxed{-\frac{4}{5} S. - F \leq S_r \leq \frac{4}{5} S. - F}$$

$$-S. \leq S_f \leq S. \rightarrow -S. \leq 1/25 S_r \leq S. \rightarrow -S. \leq 1/25 S_r \leq S. \rightarrow \boxed{-\frac{4}{5} S. \leq S_r \leq \frac{4}{5} S.}$$

$$-S. \leq S_\delta \leq S. \rightarrow -S. \leq 0.75 S_r \leq S. \rightarrow -S. \leq 0.75 S_r \leq S. \rightarrow \boxed{-\frac{4}{3} S. \leq S_r \leq \frac{4}{3} S.}$$

حداکثر مقدار S_r برابر با اشتراک بازه‌ها خواهد بود. لذا:

$$-\frac{4}{5} S. \leq S_r \leq \frac{4}{5} S.$$

$$-\frac{4}{5} S. - F \leq S_r \leq \frac{4}{5} S. - F \rightarrow \begin{cases} -\frac{4}{5} S. - F \leq S_r \rightarrow F \geq -\frac{4}{5} S. - S_r \\ S_r \leq \frac{4}{5} S. - F \rightarrow F \leq \frac{4}{5} S. - S_r \end{cases} \xrightarrow{S_r = -0.8S.} \boxed{F_{\text{خرابی}} = 1/6 S.}$$

با قرار دادن $S_r = -0.8S.$ و $F_{\text{خرابی}} = 1/6 S.$ خواهیم داشت:

$$S_1 = 0.75(S_r + F) = 0.75(-0.8S. + 1/6 S.) = 0.6S.$$

$$S_r = 1/25(S_r + F) = 1/25(-0.8S. + 1/6 S.) = S.$$

$$S_f = 1/25 S_r = 1/25 \times (-0.8S.) = -S.$$

$$S_\delta = 0.75 S_r = 0.75 \times (-0.8S.) = -0.6S.$$

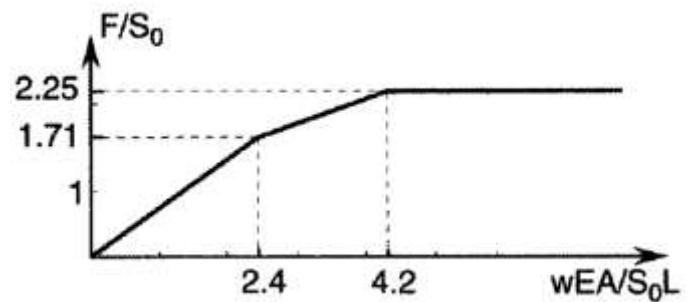
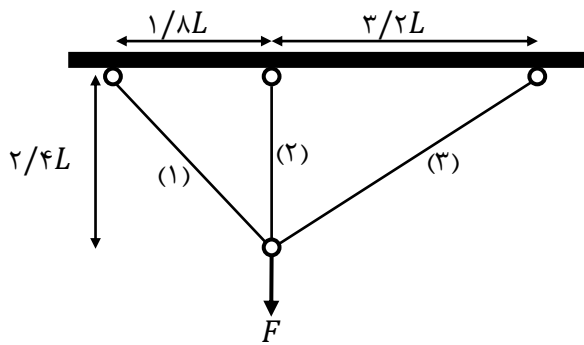
فصل پنجم

«تغییر شکل در آستانه‌ی فروریزش»

مقدمه

در فصل های قبلی ما توانستیم به روش تحلیل روند خرابی، اندازه جابجایی ها را در هر مرحله از تسلیم را محاسبه کنیم. در این فصل می خواهیم بدون تحلیل گام به گام و بررسی روند خرابی، بطور مستقیم اندازه تغییر شکل در لحظه فروریزش سازه را محاسبه کنیم.

سازه زیر را در فصل سوم بررسی کردیم و می دانیم که تغییر شکل سازه در لحظه قبل از فروریزش برابر $\frac{4}{2} \frac{EA}{S.L}$ می باشد. در این فصل می خواهیم این تغییر شکل را به روش ساده تر و بدون تحلیل تمام مراحل تسلیم، بدست بیاوریم.



ابتدا مکانیزم خرابی و بار خرابی متناظر را بدست می آوریم.

۱- فرض می کنیم ابتدا میله ۲ و ۳ تسلیم شده است:

کار خارجی = کار داخلی

$$(S.\Delta) + \left(S. \times \frac{\Delta}{.6}\right) = F \times \Delta$$

$$F_{\text{خرابی}} = 2/66S.$$

۲- فرض می کنیم ابتدا میله ۱ و ۲ تسلیم شده است:

کار خارجی = کار داخلی

$$(S.\Delta) + \left(S. \times \frac{\Delta}{.8}\right) = F \times \Delta$$

$$F_{\text{خرابی}} = 2/25S.$$

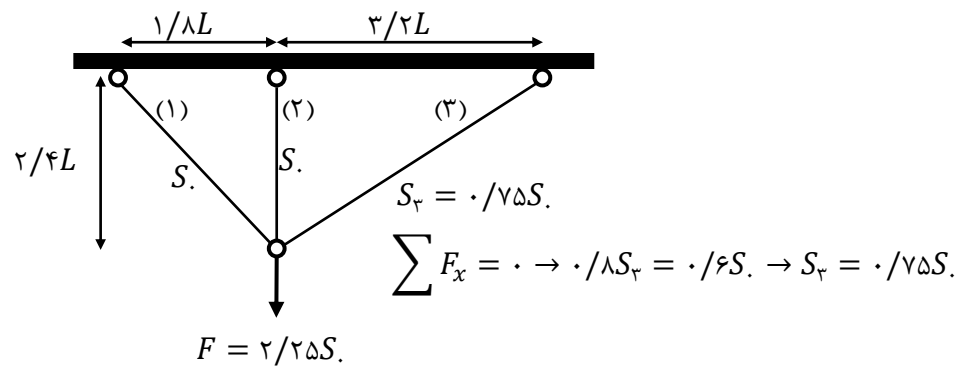
۳- فرض می کنیم ابتدا میله ۱ و ۳ تسلیم شده است:

کار خارجی = کار داخلی

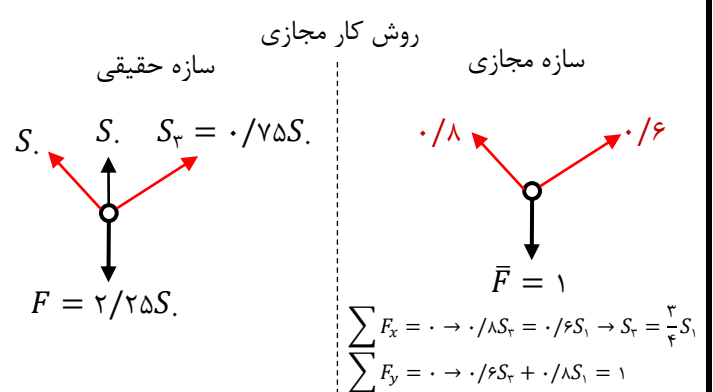
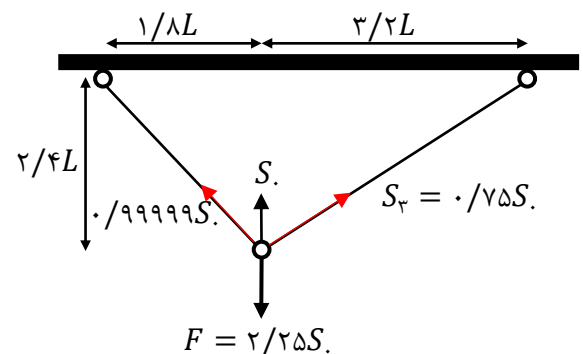
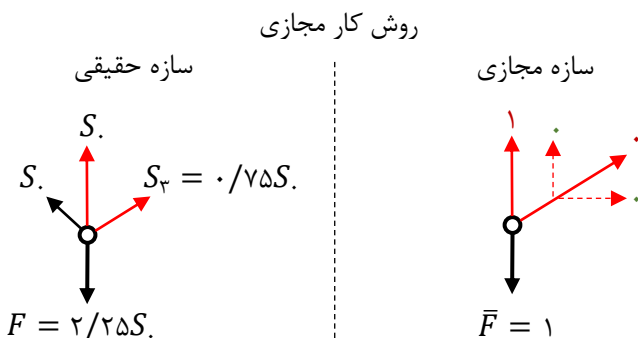
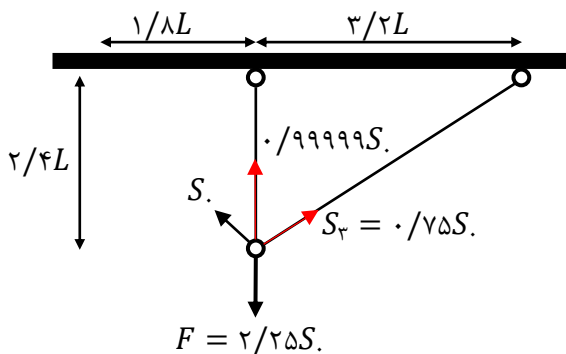
$$\left(S. \times \frac{\Delta}{.6}\right) + \left(S. \times \frac{\Delta}{.8}\right) = F \times \Delta$$

$$F_{\text{خرابی}} = 2/92S.$$

مکانیزم ۲ بعنوان مکانیزم خرابی خواهد بود. لذا بار خرابی $F_{\text{خرابی}} = 2/25S$ می باشد.

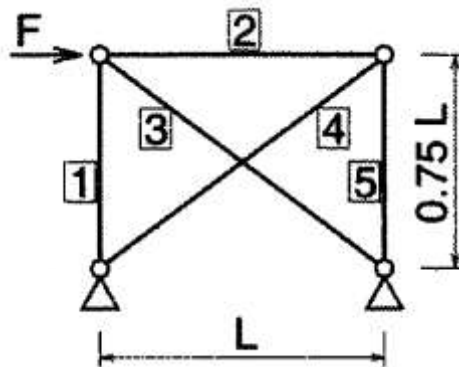


ما تا اینجا فقط بار خرابی را محاسبه کردیم و نمی‌دانیم از بین میله‌های ۱ و ۲ کدام یک زودتر تسلیم می‌رسد. لذا دو حالت مختلف (اولویت در تسلیم میله‌های ۱ و ۲) را زیر در نظر می‌گیریم و براساس هر یک تغییر مکان قائم را محاسبه می‌کنیم (به روش کار مجازی) و در نهایت تغییر مکان با اندازه بزرگ را بعنوان تغییر شکل قبل از خرابی کامل سازه معرفی می‌کنیم.



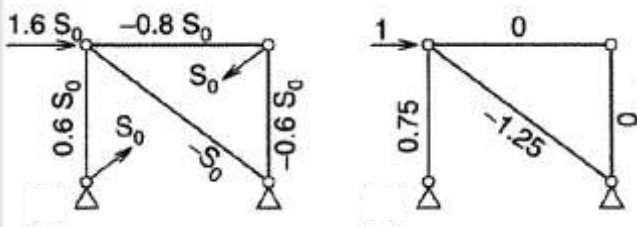
با انتخاب مقدار ماکزیموم، تغییر شکل قائم در لحظه فرو ریزش سازه ($\Delta = 4/2 \frac{S \cdot L}{EA}$) خواهد بود.

مثال ۱: مطلوب است تعیین تغییر شکل افقی نقطه‌ی اثر نیرو در لحظه فروریزش سازه. (فرض کنید بار خرابی $S/6 = F_{\text{خرابی}}$ می‌باشد و میله های ۳ و ۴ تسلیم می‌شوند).

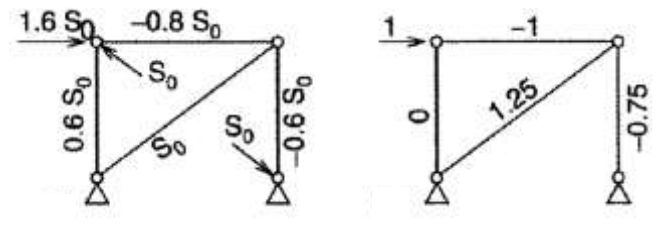


حل:

چون نمی‌دانیم کدام یک از میله‌های ۳ و ۴ تسلیم می‌شود، لذا دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:



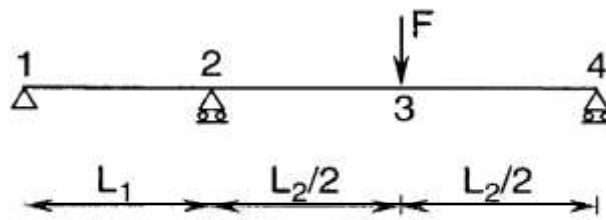
$$\Delta = \frac{1}{9} \frac{S \cdot L}{EA}$$



$$\Delta = \sum \frac{F \bar{F}}{EA} L$$

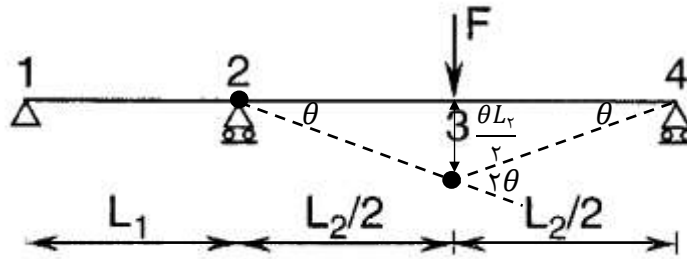
با انتخاب مقدار ماکزیموم، تغییر شکل افقی نقطه اثر نیرو در لحظه فرو ریزش سازه ($\Delta = \gamma \frac{S.L}{EA}$) خواهد بود.

مثال ۲: مطلوب است تعیین خیز تیر زیر تحت اثر نیرو در لحظه فروریزش سازه.



حل:

تعیین مکانیزم و بار خرابی:



کار خارجی = کار داخلی

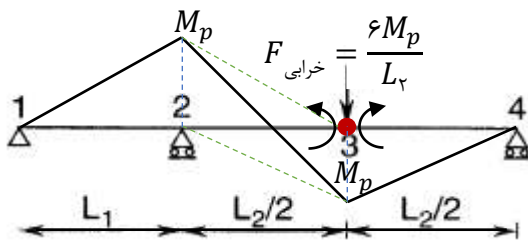
$$(M_p \theta) + (M_p \times 2\theta) = F \times \frac{\theta L_2}{2}$$

$$F_{\text{خرابی}} = \frac{6M_p}{L_2}$$

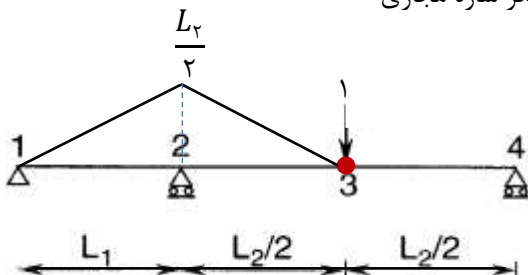
نمی‌دانیم از بین نقاط ۲ و ۳ که کدام یک زودتر تسلیم می‌شود، لذا دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت I

دیاگرام لنگر سازه واقعی

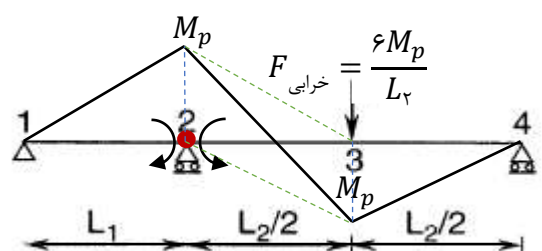


دیاگرام لنگر سازه مجازی

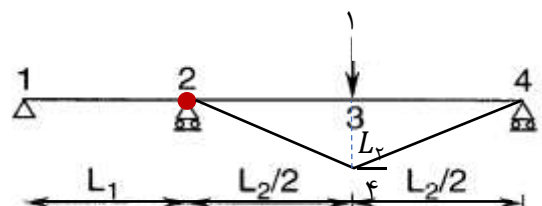


حالت II

دیاگرام لنگر سازه واقعی

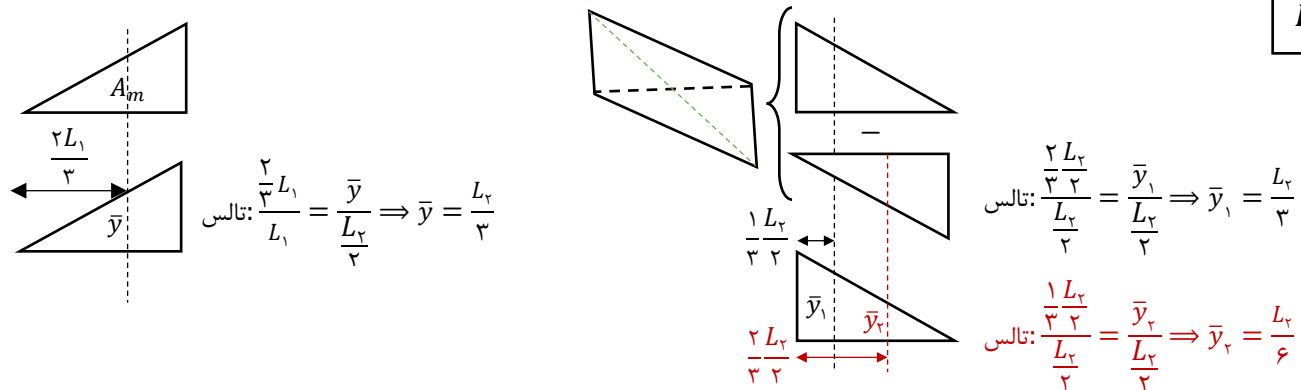


دیاگرام لنگر سازه مجازی

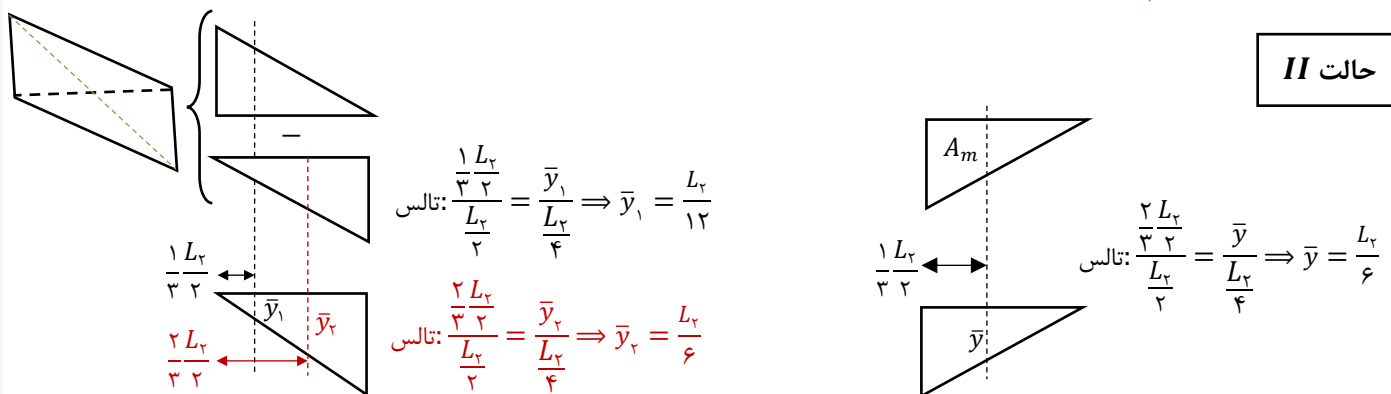


روش ترسیمی مور:

حالت I



حالت II



دهانه ۲ تا ۳

$$\Delta_I = \frac{\overbrace{\left(\frac{A_m}{2} \times \frac{L_1}{3} \right) \times \left(\frac{L_2}{3} \right)}^{\text{دهانه ۱ تا ۲}}}{EA} + \frac{\overbrace{\left(\frac{A_m}{2} \times \frac{L_2}{3} \right) \times \left(\frac{L_1}{3} \right)}^{\text{دهانه ۲ تا ۳}}}{EA} + \frac{\overbrace{\left(\frac{A_m}{2} \times \frac{L_2}{3} \right) \times \left(\frac{L_2}{6} \right)}^{\text{دهانه ۳ تا ۴}}}{EA}$$

$$\Delta_I = \frac{\frac{M_p \times L_1}{2} \times \frac{L_2}{3}}{EA} + \frac{\frac{M_p \times L_2}{2} \times \frac{L_1}{3}}{EA} + \frac{\frac{-M_p \times L_2}{2} \times \frac{L_2}{6}}{EA} = \frac{M_p L_1 L_2}{6EA} + \frac{M_p \times L_2^2}{12EA} - \frac{M_p \times L_2^2}{24EA}$$

$$= \frac{M_p L_1 L_2}{6EA} + \frac{M_p \times L_2^2}{24EA}$$

دهانه ۲ تا ۳

دهانه ۳ تا ۴

$$\Delta_{II} = \frac{\overbrace{\left(\frac{A_m}{2} \times \frac{L_2}{3} \right) \times \left(\frac{-L_2}{12} \right)}^{\text{دهانه ۱ تا ۲}}}{EA} + \frac{\overbrace{\left(\frac{A_m}{2} \times \frac{L_2}{3} \right) \times \left(\frac{-L_2}{6} \right)}^{\text{دهانه ۲ تا ۳}}}{EA} + \frac{\overbrace{\left(\frac{A_m}{2} \times \frac{L_2}{3} \right) \times \left(\frac{L_2}{6} \right)}^{\text{دهانه ۳ تا ۴}}}{EA}$$

$$\Delta_{II} = \frac{\frac{M_p \times L_2}{2} \times \frac{-L_2}{12}}{EA} + \frac{\frac{-M_p \times L_2}{2} \times \frac{-L_2}{6}}{EA} + \frac{\frac{M_p \times L_2}{2} \times \frac{L_2}{6}}{EA} = \frac{-M_p \times L_2^2}{48EA} + \frac{M_p \times L_2^2}{24EA} + \frac{M_p \times L_2^2}{24EA}$$

$$= \frac{M_p \times L_2^2}{16EA}$$

$$\Delta = \max\{\Delta_I, \Delta_{II}\}$$

باید طول دهانه‌ها معلوم باشد تا بتوان تعیین کرد، کدام خیز بعنوان تغییرشکل آستانه خرابی تیر است.

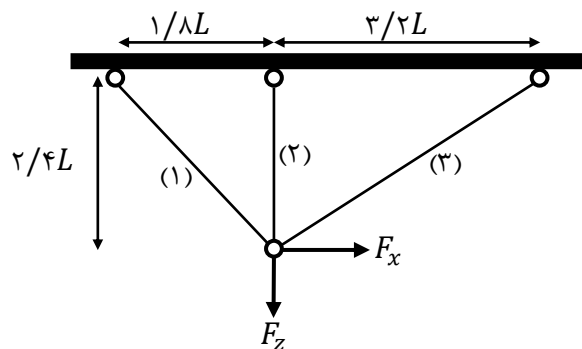
فصل ششم

«تعیین دامنه الاستوپلاستیک»

مقدمه

در فصل‌های قبلی، خرابی (پلاستیک شدن) یک سیستم سازه‌ای (مثل خرپا یا تیر و یا قاب) تحت بارهای معلوم در یک جهت خاص بررسی می‌کردیم و به کمک روش‌های مختلفی، تعیین می‌کردیم که کدام مکانیزم تحت بار مذکور، احتمال دارد که رخ بدهد و بار خرابی متناظر را محاسبه می‌کردیم. در این فصل یک سازه را تحت بارهای مجهول و متغیر بررسی خواهیم کرد و تعیین می‌کنیم که هر یک از مکانیزم‌های محتمل یک سازه تحت چه شرایط بارگذاری رخ خواهد داد و بر اساس آن ناحیه الاستوپلاستیک سازه را تعیین خواهیم کرد. بعبارت دیگر اندک‌نخس بارها را بررسی خواهیم کرد.

سازه خرابایی زیر را در نظر بگیرید. همانطور که مشاهده می‌کنید، سازه تحت دو بار مجهول (F_x و F_z) قرار دارد.

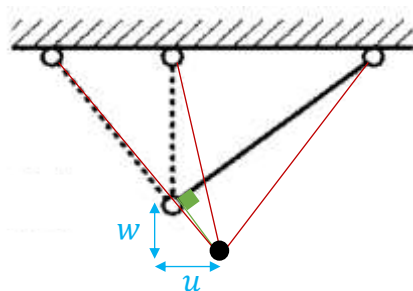


مکانیزم‌های محتمل برای سازه‌ی فوق عبارت است از:

(دقت شود که تغییر طول پلاستیک اعضایی که تسلیم نشده‌اند مساوی صفر است.)

مکانیزم ۱

تسلیم میله‌های ۱ و ۲



$$e_1 = 0.6u + 0.8w \rightarrow e_1 = 1/25w$$

$$e_2 = w$$

$$e_3 = -0.8u + 0.6w = 0 \rightarrow u = 0.75w$$

کار داخلی = کار خارجی

$$(F_x \times u) + (F_z \times w) = e_1 S_1 + e_2 S_2$$

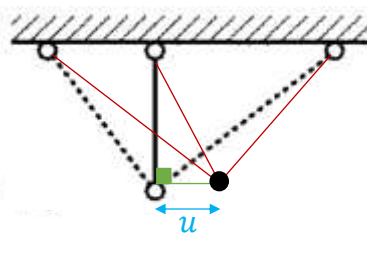
$$(F_x \times 0.75w) + (F_z \times w) = (1/25w)S_1 + wS_2$$

$$0.75F_x + F_z = 2/25S_2$$

$$-2/25S_2 \leq 0.75F_x + F_z \leq 2/25S_2$$

مکانیزم ۲

تسلیم میله‌های ۱ و ۳



$$e_1 = 0.6u + 0.8w = 0.6u$$

$$e_2 = w = 0 \rightarrow w = 0$$

$$e_3 = -0.8u + 0.6w = -0.8u$$

کار داخلی = کار خارجی

$$(F_x \times u) = e_1 S_1 + e_3 S_3$$

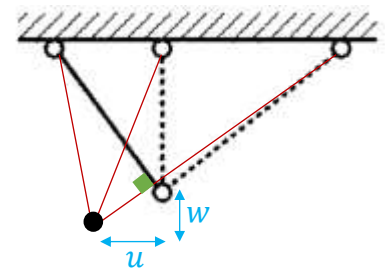
$$(F_x \times u) = (0.6u)S_1 + (-0.8u)(-S_3)$$

$$F_x = 1/4S_3$$

$$-1/4S_3 \leq F_x \leq 1/4S_3$$

مکانیزم ۳

تسلیم میله‌های ۲ و ۳



$$e_1 = -0.6u + 0.8w = 0 \rightarrow w = 0.75u$$

$$e_2 = w$$

$$e_3 = 0.8u + 0.6w = 1/25u$$

کار داخلی = کار خارجی

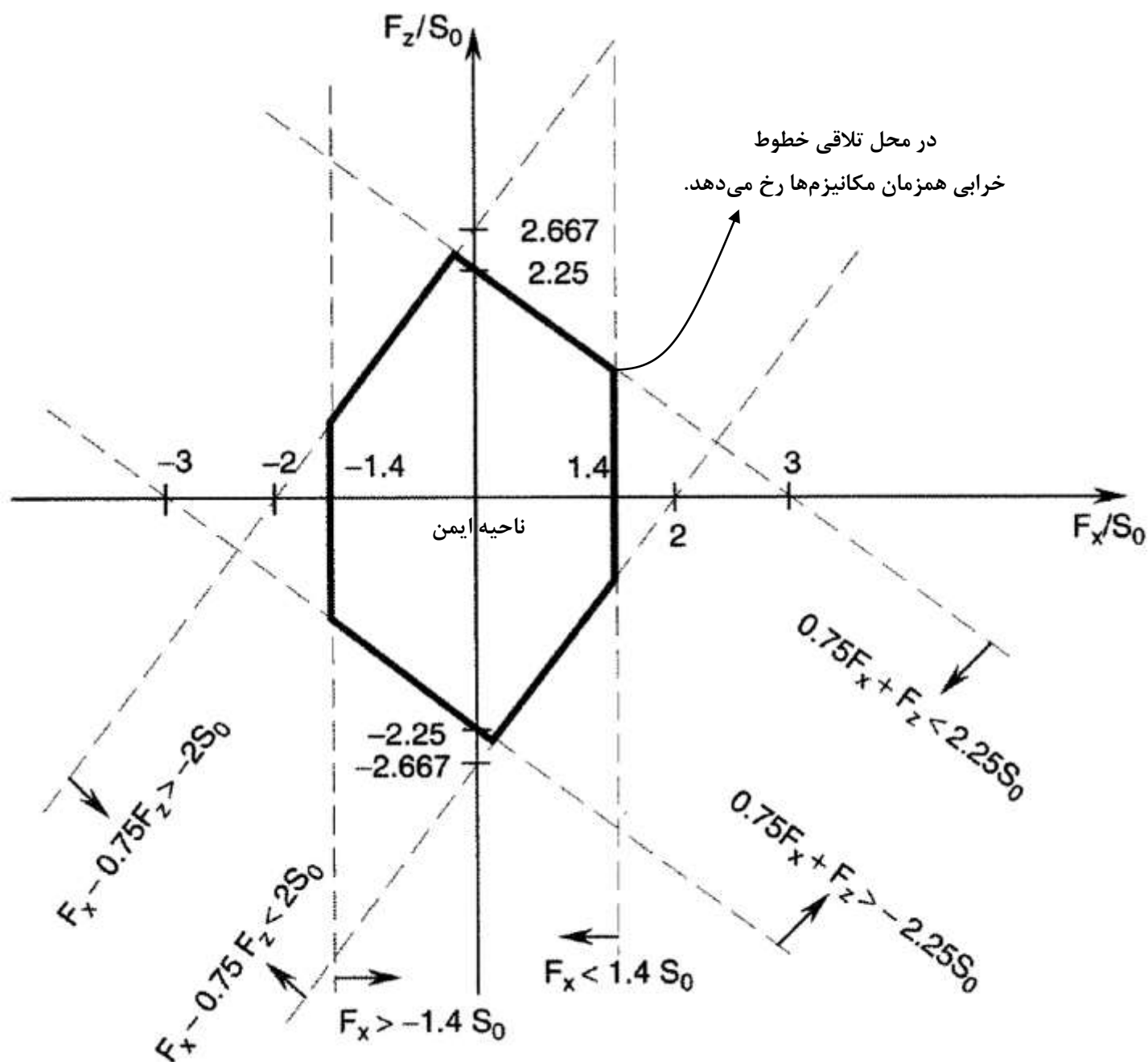
$$(-F_x \times u) + (F_z \times w) = e_2 S_2 + e_3 S_3$$

$$(-F_x \times u) + (F_z \times 0.75u) = (0.75u)S_2 + (1/25u)S_3$$

$$0.75F_z - F_x = 2/25S_3$$

$$-2/25S_3 \leq 0.75F_z - F_x \leq 2/25S_3$$

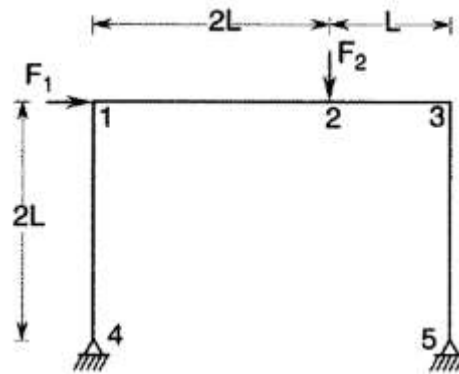
اگر سه معادله اخیر را به نمودار ترسیمی تبدیل کنیم، خواهیم داشت:



۱- اگر k مکانیزم داشته باشیم، دامنه الاستوپلاستیک، یک چندضلعی با تعداد اضلاع حداکثر $2k$ خواهد بود.

۲- دامنه (چند ضلعی) همیشه محدب است.

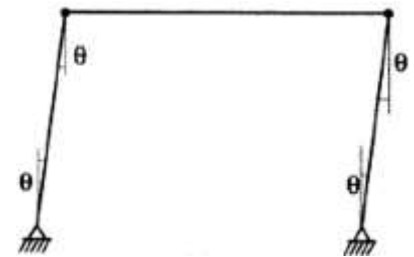
مثال ۱: مطلوب است رسم منحنی دامنه الاستوپلاستیک سازه‌ی زیر.



حل:

بررسی مکانیزم‌های محتمل:

«مکانیزم ۱»



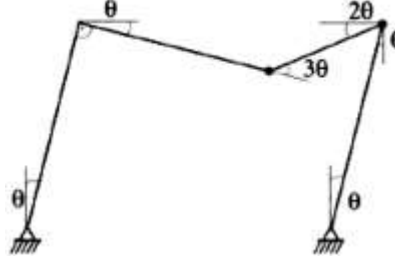
کار داخلی = کار خارجی

$$(-F_1 \times 2\theta L) = M_p \times 2\theta$$

$$-F_1 = \frac{M_p}{L}$$

$$\boxed{-\frac{M_p}{L} \leq -F_1 \leq \frac{M_p}{L}}$$

«مکانیزم ۲»



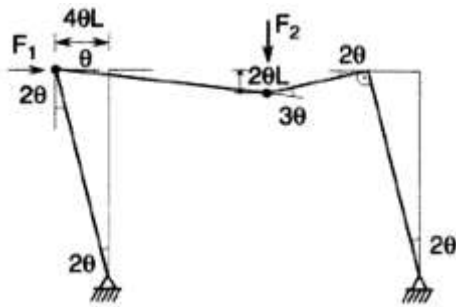
کار داخلی = کار خارجی

$$(F_1 \times 2\theta L) + (F_2 \times 2\theta L) = M_p \times 6\theta$$

$$F_1 + F_2 = \frac{3M_p}{L}$$

$$\boxed{-\frac{3M_p}{L} \leq F_1 + F_2 \leq \frac{3M_p}{L}}$$

«مکانیزم ۳»

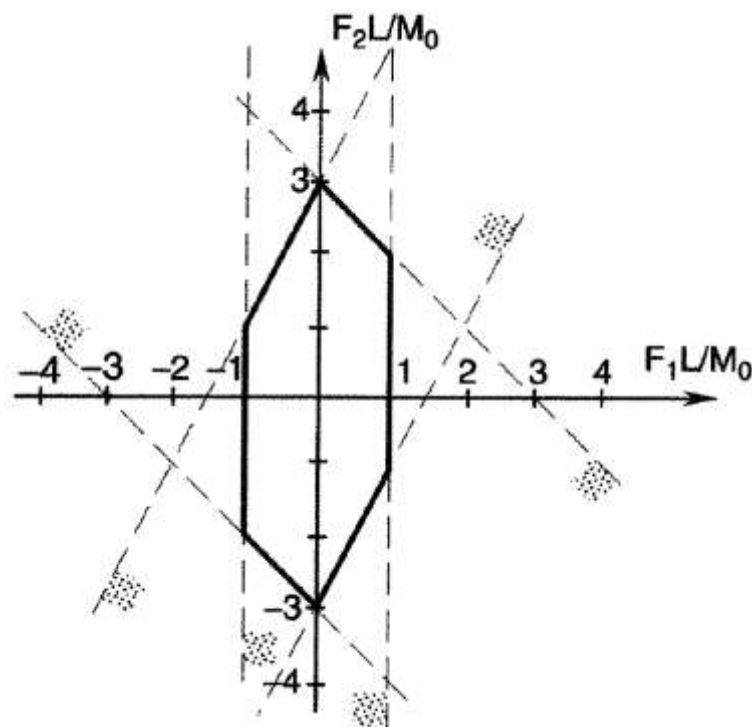


کار داخلی = کار خارجی

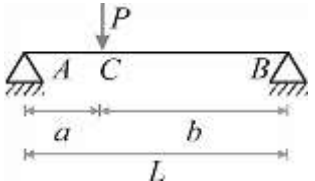
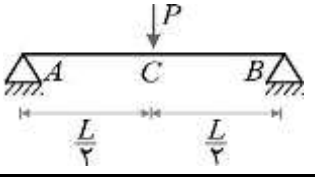
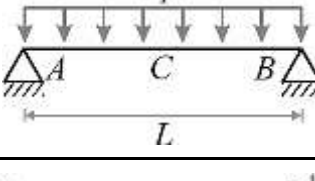
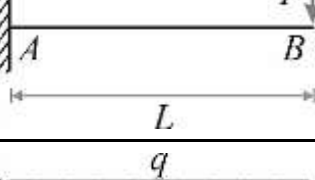
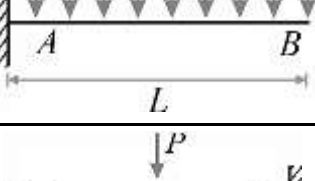
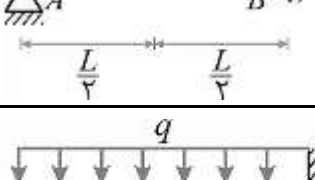
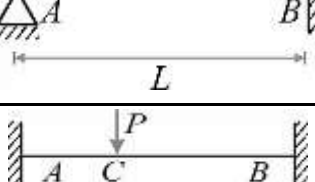
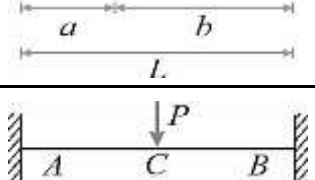
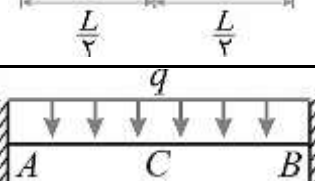
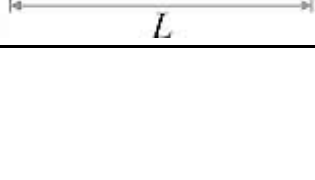
$$(-F_1 \times 4\theta L) + (F_2 \times 2\theta L) = M_p \times 6\theta$$

$$F_2 - 2F_1 = \frac{3M_p}{L}$$

$$\boxed{-\frac{3M_p}{L} \leq F_2 - 2F_1 \leq \frac{3M_p}{L}}$$

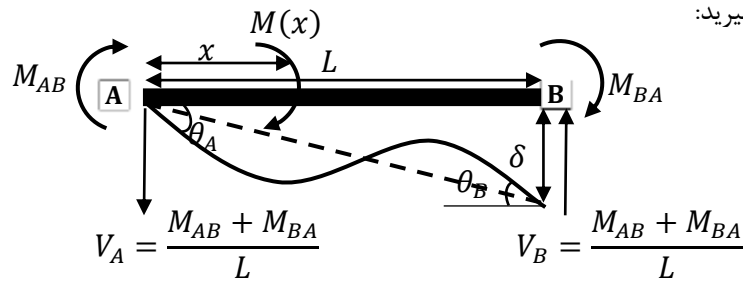


روابط مهم تحلیل سازه

تیر	R_A	R_B	M_A	M_B	M_C	θ_A	θ_B	Δ_A	Δ_B	Δ_C
	$\frac{Pb}{L}$	$\frac{Pa}{L}$	.	.	$\frac{Pab}{L}$	$\frac{Pab(L+b)}{6EI}$	$\frac{Pab(L+a)}{6EI}$	.	.	$\frac{Pa^3b^3}{6EI}$
	$\frac{P}{2}$	$\frac{P}{2}$	.	.	$\frac{PL}{4}$	$\frac{PL^3}{16EI}$	$\frac{PL^3}{16EI}$	.	.	$\frac{PL^3}{48EI}$
	$\frac{qL}{2}$	$\frac{qL}{2}$	.	.	$\frac{qL^3}{8}$	$\frac{qL^3}{24EI}$	$\frac{qL^3}{24EI}$	.	.	$\frac{5qL^4}{384EI}$
	P	.	PL	.	-	.	$\frac{PL^3}{6EI}$	.	$\frac{PL^3}{6EI}$	-
	qL	.	$\frac{qL^3}{2}$	.	-	.	$\frac{qL^3}{6EI}$	.	$\frac{qL^3}{8EI}$	-
	$\frac{5P}{16}$	$\frac{11P}{16}$	.	$\frac{3PL}{16}$	-	$\frac{PL^3}{32EI}$	.	.	.	-
	$\frac{3qL}{4}$	$\frac{qL}{4}$	.	$\frac{qL^3}{8}$	-	$\frac{qL^3}{48EI}$	.	.	.	-
	$\frac{Pb}{L}$	$\frac{Pa}{L}$	$\frac{Pab^3}{L^3}$	$\frac{Pba^3}{L^3}$	$\frac{3Pa^3b^3}{L^3}$	.	.	.	.	$\frac{Pa^3b^3}{6EI}$
	$\frac{P}{2}$	$\frac{P}{2}$	$\frac{PL}{8}$	$\frac{PL}{8}$	$\frac{PL}{8}$	.	.	.	.	$\frac{PL^3}{192EI}$
	$\frac{qL}{2}$	$\frac{qL}{2}$	$\frac{qL^3}{12}$	$\frac{qL^3}{12}$	$\frac{qL^3}{24}$	.	.	.	.	$\frac{qL^4}{384EI}$

روش شیب افت

تیر دو سر گیردار زیر را در نظر بگیرید:



در روش شیب افت، جهت مثبت شیب، خیز و لنگر در جهت ساعتگرد است.

$$M(x) = EIy''$$

$$\sum M_c = \cdot \rightarrow EIy'' + M_{AB} - \frac{M_{AB} + M_{BA}}{L}x = \cdot \rightarrow EIy'' = \frac{M_{AB}}{L}(x - L) + \frac{M_{BA}}{L}x$$

انتگرال $\rightarrow EIy' = \frac{M_{AB}}{L}\left(\frac{x^2}{2} - Lx\right) + \frac{M_{BA}}{L} \times \frac{x^2}{2} + C_1$

انتگرال $\rightarrow EIy = \frac{M_{AB}}{L}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}L\right) + \frac{M_{BA}}{L} \times \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$

شرایط مرزی:

$$\left. \begin{array}{l} y(\cdot) = \cdot \\ y'(\cdot) = \theta_A \end{array} \right\} \rightarrow C_1 = EI\theta_A, \quad C_2 = \cdot$$

$$EIy' = \frac{M_{AB}}{L}\left(\frac{x^2}{2} - Lx\right) + \frac{M_{BA}}{L} \times \frac{x^2}{2} + EI\theta_A$$

$$EIy = \frac{M_{AB}}{L}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}L\right) + \frac{M_{BA}}{L} \times \frac{x^3}{6} + EI\theta_A x$$

شرایط مرزی:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(L) = \delta \\ y'(L) = \theta_B \end{array} \right.$$

$$EI\theta_B = \frac{M_{AB}}{L}\left(\frac{L^2}{2} - L^2\right) + \frac{M_{BA}}{L} \times \frac{L^2}{2} + EI\theta_A$$

$$EI\delta = \frac{M_{AB}}{L}\left(\frac{L^3}{6} - \frac{L^2}{2}L\right) + \frac{M_{BA}}{L} \times \frac{L^3}{6} + EI\theta_A L$$

پس از مرتب کردن جفت معادله اخیر:

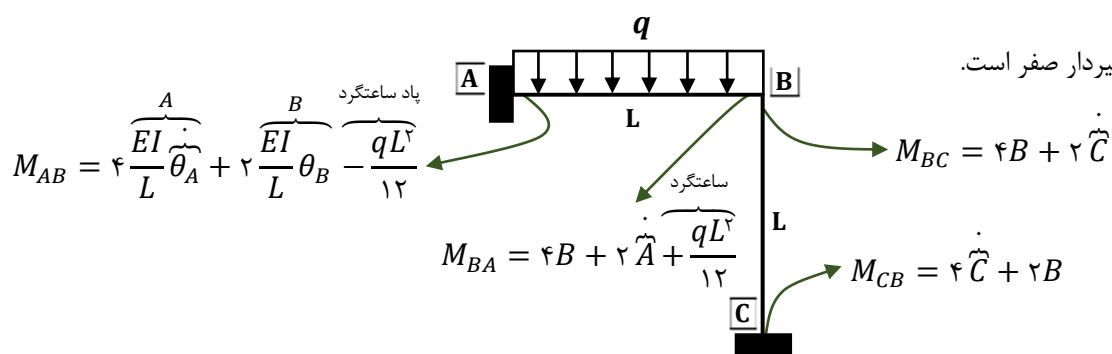
$$M_{AB} = \frac{6EI}{L}\theta_A + \frac{6EI}{L}\theta_B - \frac{6EI\delta}{L^2} \pm \widehat{FEM} \quad \text{fixed end moment}$$

$$M_{BA} = \frac{6EI}{L}\theta_B + \frac{6EI}{L}\theta_A - \frac{6EI\delta}{L^2} \pm \widehat{FEM} \quad \text{لنگر انتهای گیردار}$$

بررسی چند مثال از روش شیب افت

-۱

زاویه دوران در تکیه گاه گیردار صفر است.



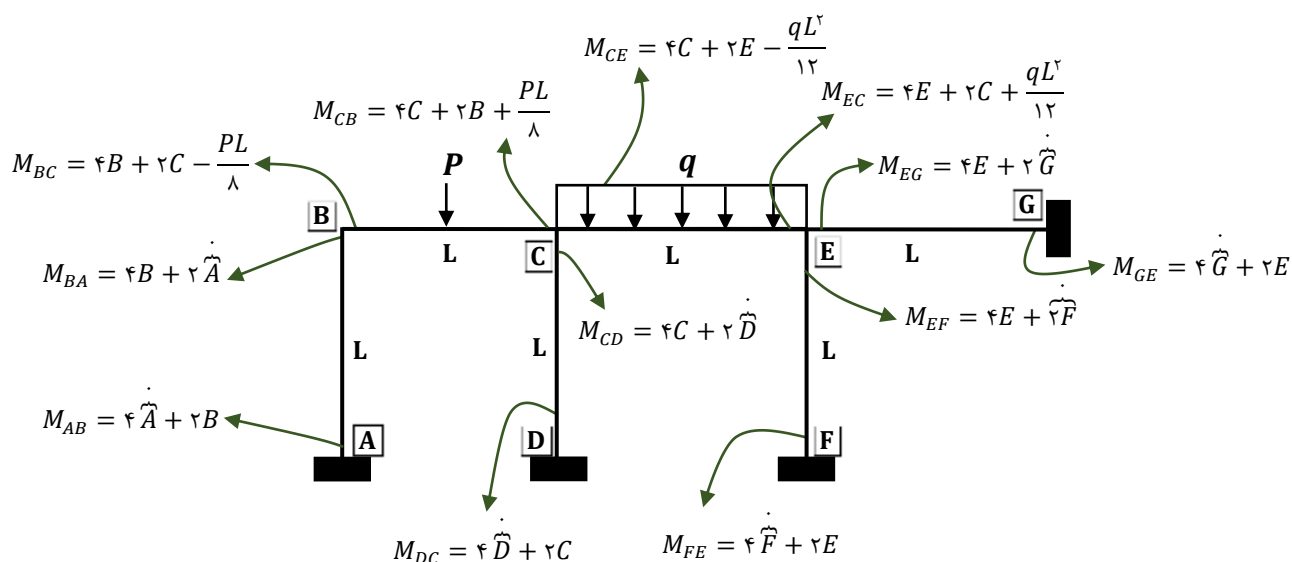
برای محاسبه‌ی مجهولات، حول گره B، تعادل لنگر می‌نویسیم.

$$\sum M_{B \text{ گره}} = 0 \rightarrow M_{BA} + M_{BC} = 0 \rightarrow \left(4B + \frac{qL^2}{12} \right) + (4B) = 0 \rightarrow B = -\frac{qL^2}{96}$$

$$M_{AB} = 2B - \frac{qL^2}{12} = 2 \left(-\frac{qL^2}{96} \right) - \frac{qL^2}{12} = -\frac{5qL^2}{48}$$

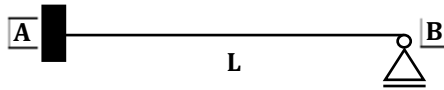
$$M_{CB} = 2B = 2 \left(-\frac{qL^2}{96} \right) = -\frac{qL^2}{48}$$

-۲



برای محاسبه‌ی مجهولات، حول گره‌ها، تعادل لنگر می‌نویسیم.

روش شیب افت اصلاح شده

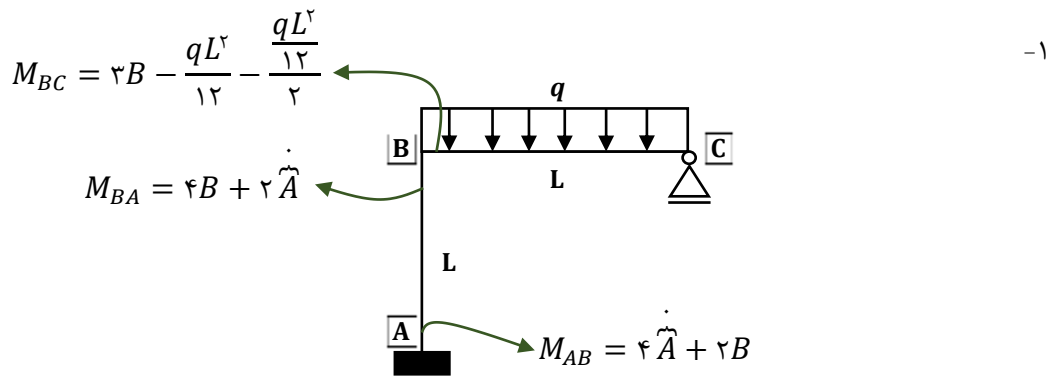


$$M_{BA} = \frac{EI}{L} \theta_B + \frac{EI}{L} \theta_A - \frac{EI}{L} \delta + FEM_{BA} = 0 \rightarrow \frac{EI}{L} \theta_B = -\frac{EI}{L} \theta_A + \frac{EI}{L} \delta - FEM_{BA} \rightarrow \boxed{\theta_B = -\frac{EI}{L} \theta_A + \frac{EI}{L} \delta - \frac{FEM_{BA}}{2}}$$

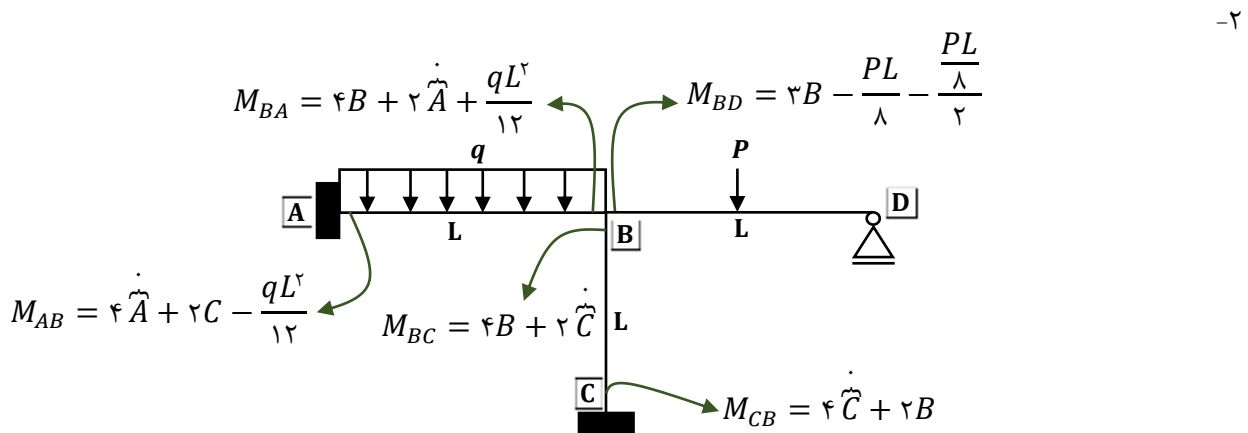
$$\begin{aligned} M_{AB} &= \frac{EI}{L} \theta_A + \frac{EI}{L} \theta_B - \frac{EI}{L} \delta - FEM_{AB} = \frac{EI}{L} \theta_A + \left[-\frac{EI}{L} \theta_A + \frac{EI}{L} \delta - \frac{FEM_{BA}}{2} \right] - \frac{EI}{L} \delta - FEM_{AB} \\ &= \frac{EI}{L} \theta_A - \frac{EI}{L} \delta - FEM_{AB} - \frac{FEM_{BA}}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{M_{AB} = \frac{EI}{L} \theta_A - \frac{EI}{L} \delta - FEM_{AB} - \frac{FEM_{BA}}{2}}$$

بررسی چند مثال از روش شیب افت اصلاح شده



برای محاسبه‌ی مجهولات، حول گره B، تعادل لنگر می‌نویسیم.

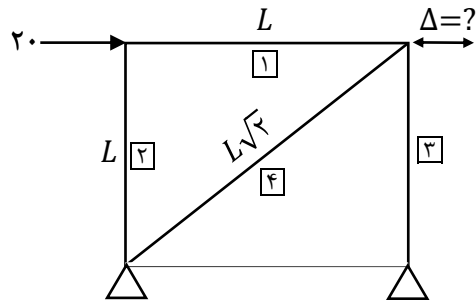


برای محاسبه‌ی مجهولات، حول گره B، تعادل لنگر می‌نویسیم.

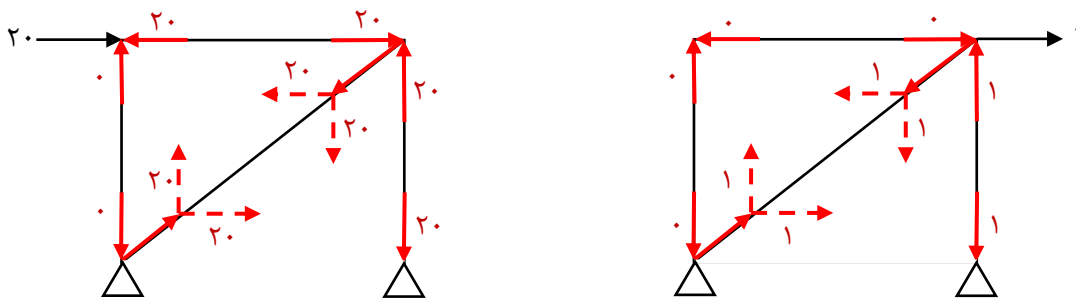
روش کار مجازی در محاسبه تغییر شکل خراباها

$$1 \times \Delta = \sum \frac{F\bar{F}}{EA} L$$

بررسی یک مثال از روش کار مجازی در محاسبه تغییر شکل خراباها



تحلیل را از گرهی شروع می‌کنیم که دو میله به آن وارد شده است.



$$1 \times \Delta = \sum \frac{F\bar{F}}{EA} L$$

$$1 \times \Delta = \frac{\overbrace{20 \times 20}^{\text{میلۀ ۱}}}{EA} L + \frac{\overbrace{20 \times 20}^{\text{میلۀ ۲}}}{EA} L + \frac{\overbrace{20 \times 1}^{\text{میلۀ ۳}}}{EA} L + \frac{\overbrace{20 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}}^{\text{میلۀ ۴}}}{EA} L \sqrt{2}$$

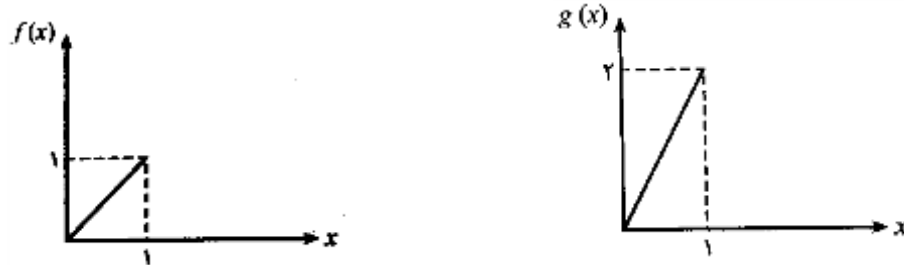
$$\Delta = \frac{L}{EA} (20 + 40\sqrt{2})$$

روش کار مجازی در محاسبه‌ی تغییر شکل تیرها

$$\Delta \times 1 = \int_0^L \left(\frac{M \bar{M}}{EA} \right) dx$$

معرفی روش ساده (روش ترسیمی مور) برای محاسبه انتگرال

دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را بصورت زیر در نظر بگیرید:



فرض کنید می‌خواهیم انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

$$\int_0^1 (f(x) \times g(x)) dx$$

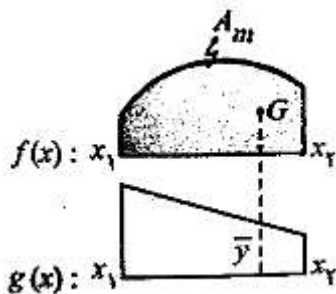
لذا داریم:

$$f(x) = x \quad g(x) = 2x$$

$$\int_0^1 (x \times 2x) dx = \int_0^1 2x^2 dx = \left[\frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

در بسیاری از سوالات روش کار مجازی استفاده از انتگرال گیری مستقیم مدت زمان حل مسئله را طولانی می‌کند. برای افزایش سرعت در محاسبه‌ی این انتگرال‌ها، از روش ترسیمی مور بهره می‌گیریم.

روش ترسیمی مور:



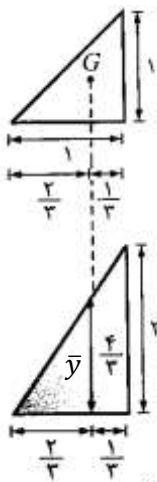
A_m : مساحت زیر نمودار $f(x)$

G : مرکز سطح نمودار $f(x)$

$\bar{y}$: مقدار $g(x)$ در نقطه نظیر G

$$\int_{x_1}^{x_2} (f(x) \times g(x)) dx = A_m \times \bar{y}$$

لذا حاصل انتگرال فوق به روش ترسیمی مور برابر است با:



$$\Rightarrow A_m = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

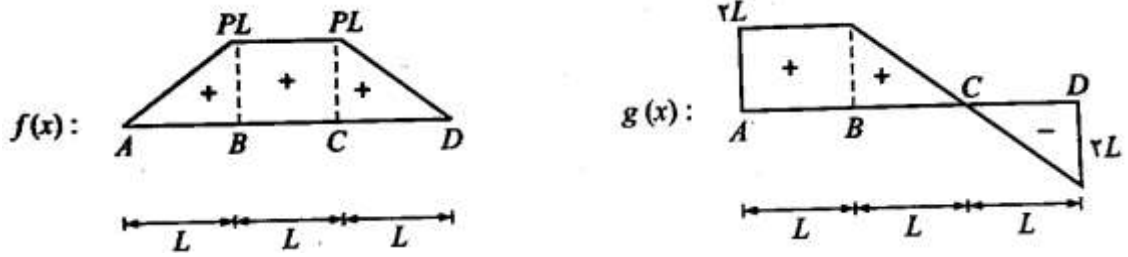
$$\int_{x_1}^{x_2} (f(x) \times g(x)) dx = A_m \times \bar{y} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{\bar{y}}{2} \Rightarrow \bar{y} = \frac{4}{3}$$

تالس:

همانطور که مشاهده می‌کنید، جواب هر دو روش یکسان است.

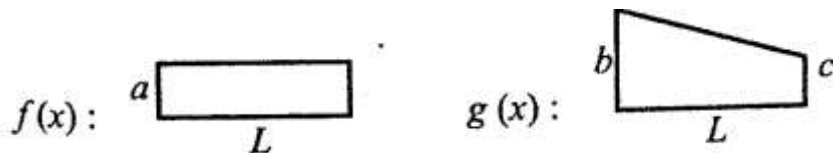
بررسی چند مثال از روش ترسیم مور در محاسبه‌ی انتگرال



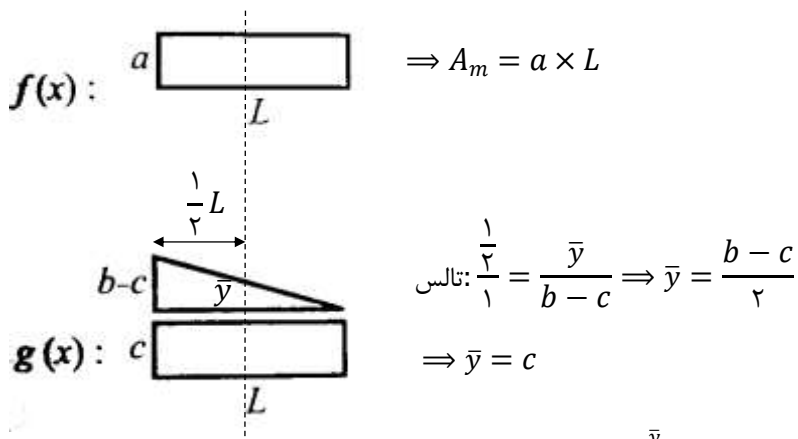
حل:

دهانه A تا B	دهانه B تا C	دهانه C تا D
$f(x)$: $g(x)$:	$f(x)$: $g(x)$:	$f(x)$: $g(x)$:
$\int_A^B (f(x) \times g(x)) dx$ $\overbrace{\left(\frac{(PL) \times L}{2} \right)}^{A_m} \times \overbrace{\left(\frac{2L}{2} \right)}^{\bar{y}} = PL^2$	$\int_B^C (f(x) \times g(x)) dx$ $\overbrace{\left((PL) \times L \right)}^{A_m} \times \overbrace{\left(\frac{L}{2} \right)}^{\bar{y}} = PL^2$	$\int_C^D (f(x) \times g(x)) dx$ $\overbrace{\left(\frac{(PL) \times L}{2} \right)}^{A_m} \times \overbrace{\left(-\frac{2L}{2} \right)}^{\bar{y}} = -\frac{PL^2}{2}$
$\int_A^D (f(x) \times g(x)) dx = PL^2 + PL^2 - \frac{PL^2}{2} = \frac{3PL^2}{2}$		

-۲



حل:



$$\int (f(x) \times g(x)) dx = \overbrace{(a \times L)}^{A_m} \times \overbrace{\left(\frac{b-c}{2} + c \right)}^{\bar{y}} = (a \times L) \times \left(\frac{b+c}{2} \right)$$